



Методические указания разработаны  
в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки  
13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»

Автор Лепав Александр Николаевич, к.т.н., доцент кафедры  
«Информационные технологии, электроэнергетика и системы управления»  
*ФИО, ученая степень, ученое звание или должность, наименование кафедры*

Методические рекомендации одобрены на заседании кафедры  
«Информационные технологии, электроэнергетика и системы управления»

(протокол № 9 от 17.04.2021 г.).

## Предисловие

Расчётно-графические работы (РГР) по ТОЭ выполняются с помощью определённых стандартных математических операций, например:

↓ решение линейных алгебраических и дифференциальных уравнений;

↓ алгебраические действия с комплексными числами;

↓ прямое и обратное преобразования Лапласа и др.

Использование современных средств вычислительной техники и соответствующего программного обеспечения позволяет не только упростить и облегчить процедуру выполнения типовых расчетов, но и значительно расширить понимание физических процессов, ввести элементы исследований при проведении экспериментов.

Наиболее перспективным инструментом при выполнении РГР является персональный компьютер с установленными на нем математической оболочкой MathCAD и программой схемотехнического моделирования Electronics Workbench (EWB).

Пакет MathCAD позволяет проводить исключительно математические расчеты по уравнениям, составленным на основе законов Кирхгофа, что в принципе не гарантирует безошибочный результат, так как ошибка может присутствовать в самих исходных уравнениях или в вычислениях необходимых для получения искомых величин.

При использовании пакета схемотехнического моделирования EWB есть возможность создания виртуальных электрических цепей и устройств из различных элементов, параметры которых могут изменяться в широких пределах.

В лаборатории EWB имеется большой набор измерительных и регистрирующих приборов, это: двухканальный цифровой осциллограф с памятью, измеритель частотных характеристик, мультиметр, а также вольтметры и амперметры.

Результаты моделирования в среде EWB способствуют более глубокому пониманию реальных физических процессов в электрических цепях. В качестве примера сюда можно отнести в частности определение угласдвига фаз между током и напряжением в цепях переменного тока, анализ с помощью осциллографа переходных функций тока и напряжения в линейных электрических цепях, вызванных коммутацией, и многое другое.

## Введение

При выполнении расчётно-графических работ по ТОЭ, обычно используют две программы:

1. MathCAD 2000 или MathCAD 2015, желательно в русифицированной версии.
2. Electronics Workbench, начиная с 4-ой версии.

Для успешной и эффективной работы, необходимо предварительно изучить и хорошо представлять основные правила работы с названными выше программами, а также знать их возможности и ресурсы при решении конкретных задач.

Программа EWB достаточно подробно рассмотрена ранее при выполнении лабораторных работ, предусмотренных в курсе ТОЭ [1,2]. Что касается программы MathCAD, как показывает опыт не у всех студентов, изучающих курс ТОЭ, имеется достаточно навыков и знаний для решения конкретных задач. Пользователь должен знать её основные команды и встроенные функции, их перечень приводится ниже.

1. « := » оператор присваивания, присваивает переменной стоящей слева от “:=” выражение, стоящее справа. Например, если вы запишите “x:=2+3”, то значение переменной “x” будет равно 5. Но намного удобнее будет сделать так:

a:=2 b:=3

x:=a+b.

Это особенно удобно при заполнении матриц, так как избавляет от постоянного набирания одних и тех же длинных комплексных и дробных чисел, к тому же это более наглядно и, если возникнет ошибка, ее будет намного легче найти и исправить.

2. « = » используется для вывода результата вычислений т. е. если набрано “x:=a+b”, где a, b числа, определенные ранее, то, что бы посмотреть значение переменной надо набрать “x=” и программа автоматически выведет результат вычислений.

3. « ORIGIN: =1 » с этой команды следует начать выполнение РГР, так как по умолчанию MathCad нумерует строки (столбцы) не с первой как мы к этому привыкли, а с нулевой, что может привести к путанице и недоразумениям.

4. « Isolve(A,B) » встроенная функция, решающая систему уравнений по формулам Крамера, где A – матрица коэффициентов, а B – матрица свободных членов.

5. комплексные числа в MathCad представляются в виде “a:=x+yi”, где

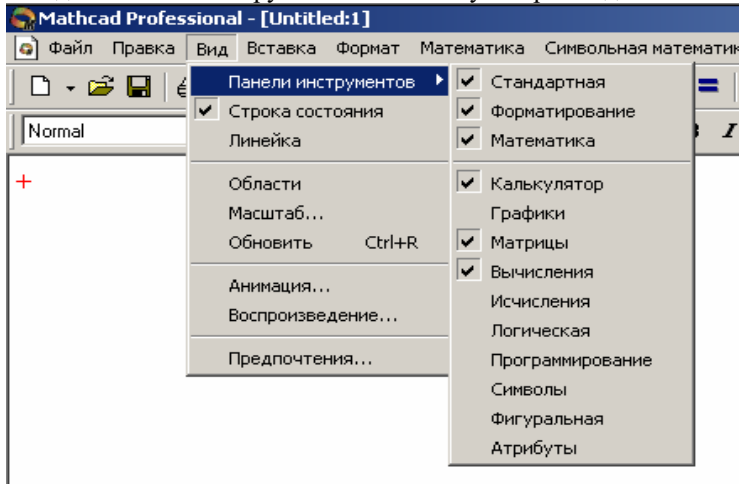
x

– действительная часть, а y – мнимая часть.

1. arg (a) - функция, определяющая аргумент комплекса “a” в

радианах.

2. после запуска программы, для удобства работы, активизируют следующие панели инструментов: “калькулятор”, “вычисления”, “матрицы”, “графики”, “вычисления”. Для этого следует нажать “вид” - “панели инструментов” - “калькулятор” и т.д.



3. В пункте 4 был рассмотрен метод решения систем линейных алгебраических уравнений с помощью функции  $\text{lsolve}(A, B)$ , но этот метод не всегда приводит к желаемым результатам при расчете систем нелинейных уравнений, в этих целях лучше использовать функцию  $\text{Given}$

$\text{find}(\dots, \dots, \dots)$

со следующими атрибутами:

↓ задают начальные значения искомых величин;

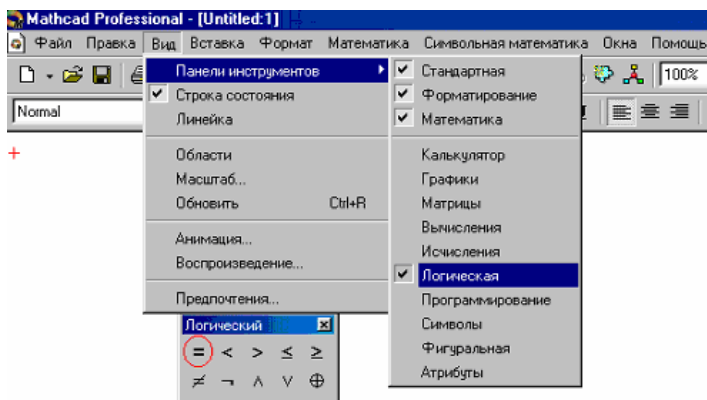
↓ набирают оператор  $\langle \text{Given} \rangle$ ;

↓ записывают систему уравнений, где вместо знака “=”

пишется “логическое равно”, ниже на рисунке показано как найти логическую панель инструментов и “логическое равно” на ней;

↓ записывают  $\text{find}(\dots, \dots, \dots)$ , где в скобках, через

запятую, указывают те переменные, которые надо найти.



4. Для численного решения дифференциального уравнения используют функцию  $Rkfixed(\langle \text{начальные условия} \rangle, \langle t1 \rangle, \langle t2 \rangle, \langle N \rangle, \langle D \rangle)$ .

### Методические указания по выполнению РГР

Перед выполнением РГР необходимо изучить соответствующую главу по учебным пособиям и лекциям, использовать задачи, решенные на практических занятиях, а также наблюдения и навыки, полученные при выполнении лабораторных работ.

Выполнение каждого пункта задания следует сопровождать пояснениями и выводами, соблюдая при этом заданный порядок с соответствующей рубрикацией.

Схемы, графики, диаграммы выполняются аккуратно и в удобном масштабе.

Не рекомендуется изменять в пределах одной работы направления токов и напряжений, наименования узлов, сопротивлений, токов, напряжений и их индексов. Не допускается в тексте сокращённое написание слов, кроме общепринятых, таких как ЭДС, КПД и др.

В каждой конкретной задаче можно выделить некоторые этапы.

Например, при громоздких выражениях в общем виде, можно свести их к компактным, подставив числовые значения заданных или прежде вычисленных величин.

Важным этапом является анализ полученных результатов, умение удостовериться в их правильности, с тем, чтобы продолжать работу, располагая правильными данными предыдущих расчетов. Погрешность вычислений не должна превышать  $\pm 5\%$ . Для оценки правильности полученных результатов составляют баланс мощности, приводят потенциальные, топографические и векторные диаграммы.

## Задание №1

### Цепь постоянного тока

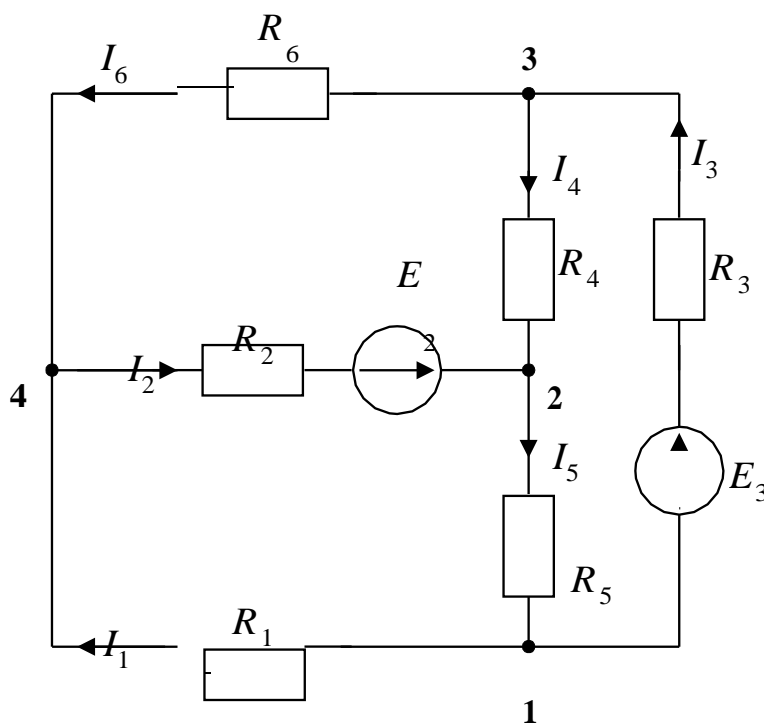


Рис. 1

Заданы следующие значения сопротивлений и ЭДС:

$$\begin{array}{lll}
 R_1 = (10 \cdot n) \text{ Ом}; & R_4 = (10 \cdot n) \text{ Ом}; & E_2 = (20 \cdot n) \text{ В}; \\
 R_2 = (15 \cdot n) \text{ Ом}; & R_5 = (5 \cdot n) \text{ Ом}; & E_3 = (30 \cdot n) \text{ В}. \\
 R_3 = (10 \cdot n) \text{ Ом}; & R_6 = (10 \cdot n) \text{ Ом}; & 
 \end{array}$$

где n-номер варианта(последняя цифра зачетки)

#### Требуется:

1. Составить граф схемы.
2. Составить систему уравнений по законам Кирхгофа для своей цепи.
3. Составить систему уравнений методом контурных токов.
4. Составить систему уравнений методом узловых потенциалов (напряжений).
5. Рассчитать токи в ветвях и напряжения на отдельных элементах одним из методов, п.3 и п.4. Составить баланс мощностей.
6. Рассчитать ток в 4-й ветви  $I_4$  методом эквивалентного генератора. Построить внешнюю характеристику эквивалентного генератора  $U_{\Gamma}(I_4)$ , на которой обозначить рабочую точку.

#### 1. Граф схемы

Заданную схему изобразим в виде графа, в котором ветви представляются отрезками линий; идеальный источник ЭДС учитывается как короткозамкнутая ветвь.

Часть графа, содержащая все узлы, но не содержащая ни одного замкнутого контура, называется деревом. Число ветвей дерева на единицу меньше числа узлов схемы. Для данной схемы выбираем ветви дерева – 2, 4, 5 ветви.

Ветви графа, не входящие в состав дерева, называются хордами. Число хорд равно числу независимых контуров. Хордами будут 1, 3, 6 ветви.

Выбираем положительные направления токов в ветвях. Граф схемы показан на рис. 2 и содержит 4 узла и 6 ветвей.

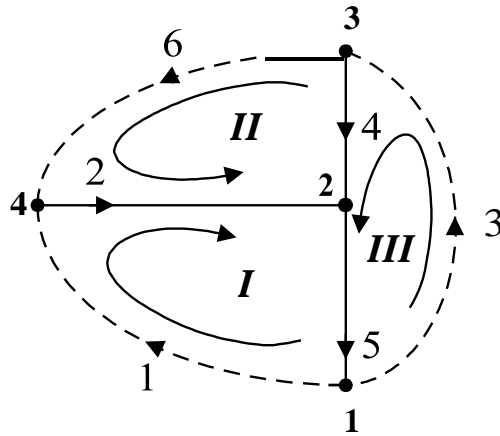


Рис. 2

Выбираем направление положительного обхода независимых контуров, совпадающее с направлением тока хорды.

## 2. Система уравнений по законам Кирхгофа

По первому закону Кирхгофа всегда составляется уравнений на единицу меньше, чем узлов в схеме:

$$n = q - 1 = 4 - 1 = 3,$$

где  $q = 4$  – число узлов схемы.

По второму закону Кирхгофа составляем  $m$  уравнений для выбранных независимых контуров:

$$m = p - (q - 1) = 6 - (4 - 1) = 3,$$

где  $p = 6$  – число ветвей цепи.

Например, уравнения, составленные по I закону Кирхгофа для 1-го, 2-го и 3-го узлов, имеют вид:

$$I_5 - I_1 - I_3 = 0,$$

$$I_2 + I_4 - I_5 = 0,$$

$$I_3 - I_4 - I_6 = 0.$$

Уравнения по II закону Кирхгофа для 3-х контуров:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_5 I_5 = E_2,$$

$$R_2 I_2 - R_4 I_4 + R_6 I_6 = E_2,$$

$$R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = E_3.$$

Таким образом, получили систему из шести уравнений.

### 3. Составим систему уравнений по методу контурных токов.

Этот метод заключается в том, что вместо токов в ветвях на основании второго закона Кирхгофа определяются так называемые контурные токи, замыкающиеся в контурах. Число уравнений, записываемых для контурных токов по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров.

Зададим направления контурных токов (рис. 3). Направление обхода каждого контура обычно принимается совпадающим с выбранным положительным направлением контурного тока.

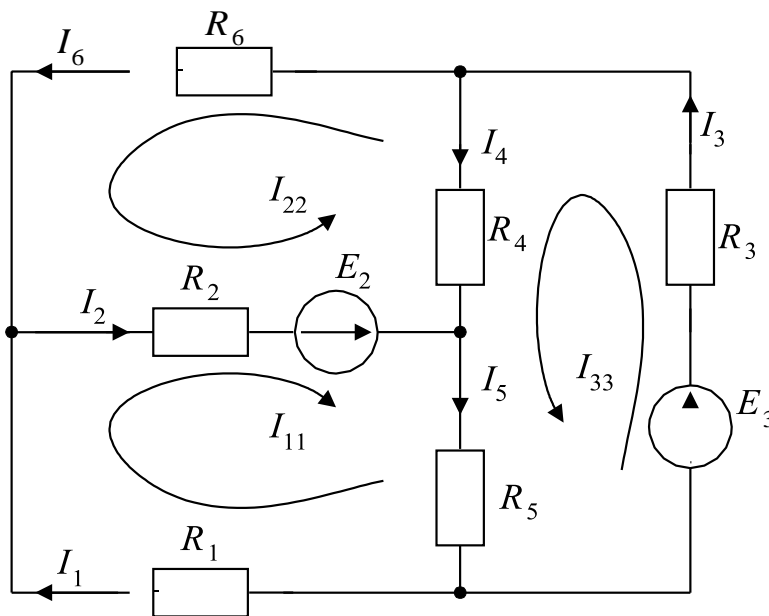


Рис. 3

Запишем уравнение для первого контура:

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_{11} + R_2I_{22} + R_5I_{33} = E_2,$$

или

$$R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11},$$

где  $E_{11} = E_2$  – контурная ЭДС 1-го контура, т. е. алгебраическая сумма ЭДС, действующих в данном контуре; ЭДС, совпадающие по направлению с направлением обхода, берутся со знаком плюс, а направленные встречно – со знаком минус;

$R_{11} = (R_1 + R_2 + R_5)$  – собственное сопротивление 1-го контура, равное сумме сопротивлений, входящих в контур;

$R_{12} = R_2$  – общее сопротивление 1-го и 2-го контуров; это сумма сопротивлений в общей для 1-го и 2-го контуров ветви;

$R_{13} = R_5$  – общее сопротивление 1-го и 3-го контуров.

Общие сопротивления войдут в уравнения со знаком «-», когда контурные токи по общей ветви направлены встречно; если контурные токи направлены согласно, в уравнениях общие сопротивления будут со знаком «+».

Для двух других контуров уравнения, записанные по методу контурных токов, будут иметь вид:

$$R_2I_{11} + (R_2 + R_4 + R_6)I_{22} - R_4I_{33} = E_2,$$

$$R_5I_{11} - R_4I_{22} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{33} = E_3.$$

Или в общем виде система будет иметь вид:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}, \\ \begin{cases} R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}, \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33}. \end{cases} \end{cases}$$

4. Составим систему уравнений по методу узловых потенциалов.

Метод узловых потенциалов заключается в том, что на основании первого закона Кирхгофа определяются потенциалы в узлах электрической цепи относительно некоторого базисного узла. Эти разности потенциалов называются узловыми напряжениями, причем положительное направление их указывается стрелкой от рассматриваемого узла к базисному.

Число уравнений, составленных по методу узловых потенциалов, равно числу узлов без единицы ( $q - 1$ ).

Если в рассматриваемой схеме узел 4 мысленно заземлить, т. е. принять  $\varphi_4 = 0$ , то необходимо определить потенциалы трех узлов:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

Запишем уравнение для 1-го узла (рис. 1.19):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R & R & R \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \varphi_1 - \frac{1}{R_5} \varphi_2 - \frac{1}{R_3} \varphi_3 = -\frac{E_3}{R_3},$$

или

$$G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + G_{13}\varphi_3 = J_{11},$$

где  $J_{11} = -\frac{E_3}{R_3} = -E G_{33}$  – узловой ток узла 1, равный сумме произведений ЭДС ветвей,

подходящих к 1-му узлу, и проводимостей этих ветвей. При этом член суммы записывается со знаком «+», если соответствующая ЭДС направлена к 1-му узлу, в противном случае ставится знак «-». Если в подходящих к 1-му узлу ветвях содержатся источники тока, то знаки токов источников токов, входящих в узловой ток простыми слагаемыми, определяются аналогично;

$$G_{11} = G_1 + G_3 + G_5 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \text{ – собственная проводимость 1-го узла, равная}$$

сумме проводимостей ветвей, сходящихся в узле 1;

$$G_{12} = -G_5 = -\frac{1}{R_5} \text{ – общая проводимость между узлами 1 и 2, т. е. сумма}$$

проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы;

$$G_{13} = -G_3 = -\frac{1}{R_3} \text{ – общая проводимость между узлами 1 и 3.}$$

Общие проводимости между узлами берутся со знаком «-».

Для 2-го и 3-го узлов уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^1} \varphi_1 + \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^4} + \frac{1}{R^5} \right) \varphi_2 - \frac{1}{R^4} \varphi_3 &= \frac{E_2}{E_3}, \\ -\frac{1}{R^2} \varphi_1 - \frac{1}{R^4} \varphi_2 + \left( \frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^4} + \frac{1}{R^6} \right) \varphi_3 &= \frac{E_3}{R^3}. \end{aligned}$$

Или в общем виде система будет иметь вид:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + G_{13}\varphi_3 = J_{11}, \\ G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 + G_{23}\varphi_3 = J_{22}, \\ G_{31}\varphi_1 + G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 = J_{33}. \end{cases}$$

## 5. Расчет токов в ветвях и напряжения на отдельных элементах одним из методов

### 5.1 Расчет цепи методом контурных токов

Подставляя численные значения, определим собственные и общие сопротивления контуров.

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_2 + R_5 = 10 + 15 + 5 = 30 \text{ Ом}, \\ R_{22} &= R_2 + R_4 + R_6 = 15 + 10 + 10 = 35 \text{ Ом}, \\ R_{33} &= R_3 + R_4 + R_5 = 10 + 10 + 5 = 25 \text{ Ом}, \\ R_{12} &= R_{21} = R_2 = 15 \text{ Ом}, \\ R_{13} &= R_{31} = R_5 = 5 \text{ Ом}, \\ R_{23} &= R_{32} = -R_4 = -10 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 30I_{11} + 15I_{22} + 5I_{33} = 20, \\ 15I_{11} + 35I_{22} - 10I_{33} = 20, \\ 5I_{11} - 10I_{22} + 25I_{33} = 30. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получаем значения контурных токов:

$$\begin{aligned} I_{11} &= -0,18 \text{ А}; \\ I_{22} &= 1,13 \text{ А}; \\ I_{33} &= 1,69 \text{ А}. \end{aligned}$$

Выразим токи всех ветвей через найденные значения контурных токов  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} = -0,18 \text{ А}; \\ I_2 &= I_{11} + I_{22} = -0,18 + 1,13 = 0,95 \text{ А}; \\ I_3 &= I_{33} = 1,69 \text{ А}; \\ I_4 &= I_{33} - I_{22} = 1,69 - 1,13 = 0,56 \text{ А}; \\ I_5 &= I_{11} + I_{33} = -0,18 + 1,69 = 1,51 \text{ А}; \\ I_6 &= I_{22} = 1,13 \text{ А}. \end{aligned}$$

Найдем напряжения на отдельных элементах:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I_1 = 10 \cdot 0,18 = 1,8 \text{ В}; & U_4 &= R_4 I_4 = 10 \cdot 0,56 = 5,57 \text{ В}; \\ U_2 &= R_2 I_2 = 15 \cdot 0,951 = 14,27 \text{ В}; & U_5 &= R_5 I_5 = 5 \cdot 1,51 = 7,54 \text{ В}; \\ U_3 &= R_3 I_3 = 10 \cdot 1,69 = 16,89 \text{ В}; & U_6 &= R_6 I_6 = 10 \cdot 1,13 = 11,31 \text{ В}. \end{aligned}$$

Для проверки правильности расчетов составим баланс мощностей.

Суммарная мощность источников

$$P_{\text{и}} = E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = 20 \cdot 0,95 + 30 \cdot 1,69 = 19,02 + 50,67 = 69,69 \text{ Вт.}$$

Суммарная мощность потребителей

$$P_{\Pi} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 = 0,18^2 \cdot 10 + 0,95^2 \cdot 15 + 1,69^2 \cdot 10 + 0,56^2 \cdot 10 + 1,51^2 \cdot 5 + 1,13^2 \cdot 10 = 69,68 \text{ Вт.}$$

Баланс мощностей должен выполняться с точностью  $\pm 5\%$ .

$$\frac{P_{\text{и}} - P_{\Pi}}{P_{\Pi}} \cdot 100\% = \frac{69,69 - 69,68}{69,68} \cdot 100\% = 0,014\%,$$

что подтверждает правильность расчета токов.

## 5.2 Расчет цепи методом узловых потенциалов

Подставляя численные значения, определим собственные и общие проводимости узлов.

$$G_{11} = G_1 + G_3 + G_5 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = 0,1 + 0,1 + 0,2 = 0,4 \text{ См};$$

$$G_{22} = G_2 + G_4 + G_5 = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = 0,067 + 0,1 + 0,2 = 0,37 \text{ См};$$

$$G_{33} = G_3 + G_4 + G_6 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -G_5 = -\frac{1}{5} = -0,2 \text{ См};$$

$$G_{13} = G_{31} = -G_3 = -\frac{1}{10} = -0,1 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = -G_4 = -\frac{1}{10} = -0,1 \text{ См.}$$

Найдем значения узловых токов.

$$J_{11} = -\frac{E_3}{R_3} = -\frac{30}{10} = -3 \text{ А};$$

$$J_{22} = \frac{E_2}{R_2} = \frac{20}{15} = 1,33 \text{ А};$$

$$J_{33} = \frac{E_3}{R_3} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А.}$$

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 0,4\varphi_1 - 0,2\varphi_2 - 0,1\varphi_3 = -3; \\ -0,2\varphi_1 + 0,37\varphi_2 - 0,1\varphi_3 = 1,33; \\ -0,1\varphi_1 - 0,1\varphi_2 + 0,3\varphi_3 = 3. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений с помощью программы Complex Matrix или электронных таблиц Excel, получаем значения потенциалов в узлах:

$$\varphi_1 = -1,82 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = 5,71 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = 11,3 \text{ В}.$$

После решения системы относительно потенциалов определяют токи в ветвях по закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС.

$$I_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} = \frac{-1,82}{10} = -0,18 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{-\varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{-5,71 + 20}{15} = 0,95 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_3}{R_3} = \frac{-1,82 - 11,3 + 30}{10} = 1,69 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_4} = \frac{11,3 - 5,71}{10} = 0,56 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{\varphi - \varphi}{R_5} = \frac{5,71 - (-1,82)}{10} = 1,51 \text{ A};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_3}{R_6} = \frac{11,296}{10} = 1,13 \text{ A}.$$

Следовательно, расчет токов различными методами дает практически одинаковые их значения.

6. Расчет тока в ветви, содержащей сопротивление  $R_4$ , методом эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора позволяет достаточно просто определить ток в одной ветви сложной линейной схемы, не находя токи в остальных ветвях.

По отношению к выделенной ветви  $mn$  с сопротивлением  $R_n$  вся остальная часть сложной цепи, содержащая источники ЭДС, может быть заменена одним эквивалентным генератором с ЭДС  $E_0$  и внутренним сопротивлением  $R_0$ .

Расчет осуществляется в два этапа:

1. Любым из известных методов расчета линейных электрических цепей определяют напряжение  $U_{mn}$  на зажимах  $mn$  активного двухполюсника при разомкнутой исследуемой ветви.

2. При разомкнутой исследуемой ветви определяется входное сопротивление активного двухполюсника, заменяемого при этом пассивным. Данная замена осуществляется путем устранения из структуры активного двухполюсника всех источников энергии, но при сохранении на их месте их собственных (внутренних) сопротивлений. В случае идеальных источников это соответствует закорачиванию всех источников ЭДС и размыканию всех ветвей с источниками тока.

Для расчета ЭДС эквивалентного источника напряжения необходимо разомкнуть ветвь с сопротивлением  $R_4$  и произвести расчет оставшейся цепи (рис. 4, а).

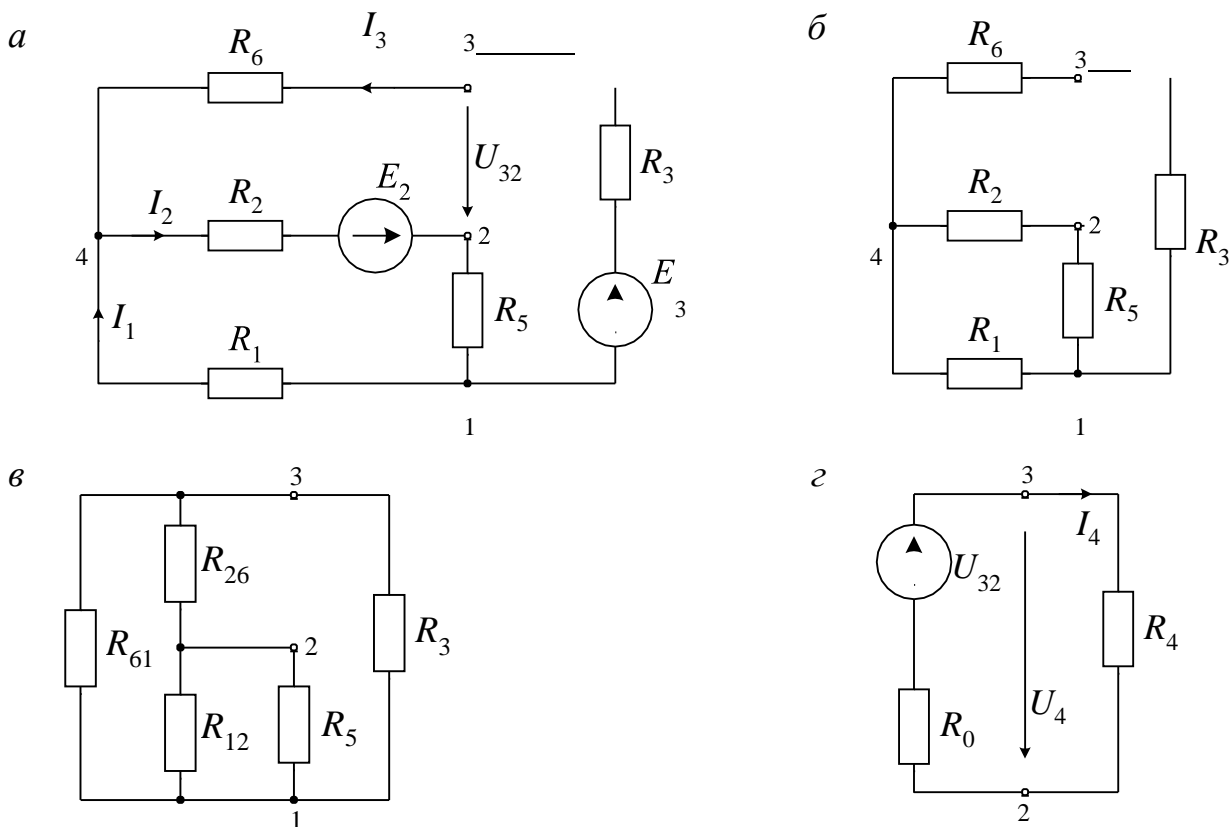


Рис. 4

Разность потенциалов между точками 3 и 2 дает величину ЭДС эквивалентного источника  $E_0$ .

$$E_0 = U_{32} = \varphi_3 - \varphi_2 = E_3 - R_5 I_2 - R_3 I_3.$$

Токи в ветвях  $I_1, I_2, I_3$  найдем методом контурных токов. Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_5)I_1 + (R_2 + R_5)I_3 = E_2, \\ (R_2 + R_5)I_1 + (R_2 + R_3 + R_5 + R_6)I_3 = E_2 + E_3. \end{cases} \quad \begin{cases} 30I_1 + 20I_3 = 20, \\ 20I_1 + 40I_3 = 50. \end{cases}$$

Решив ее, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= -0,25 \text{ А}; \\ I_3 &= 1,36 \text{ А}; \\ I_2 &= I_1 + I_3 = 1,13 \text{ А}. \end{aligned}$$

Тогда

$$E_0 = E_3 - R_5 I_2 - R_3 I_3 = 30 - 5 \cdot 1,13 - 10 \cdot 1,38 = 10,63 \text{ В}.$$

Внутреннее сопротивление источника  $R_0$  определяется как входное сопротивление цепи (без  $R_4$ ) со стороны узлов 2 и 3 при замкнутых накоротко источниках  $E_2$  и  $E_3$  (рис. 1.22, б). Для расчета сопротивления  $R_0$  целесообразно преобразовать звезду сопротивлений  $R_1, R_2, R_6$ , соединенных в узел 4, в эквивалентное соединение треугольником  $R_{12}, R_{26}, R_{61}$  (рис. 1.22, в).

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_6 + R_2 R_6}{R_1} = \frac{10 \cdot 15 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 10}{10} = 40 \text{ Ом};$$

$$R_{26} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_6 + R_2 R_6}{R_2} = \frac{10 \cdot 15 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 10}{10} = 40 \text{ Ом};$$

$$R_{61} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_6 + R_2 R_6}{R_6} = \frac{10 \cdot 15 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 10}{10} = 26,67 \text{ Ом}.$$



Сопровитления  $R_5$  и  $R_{12}$  соединены между собой параллельно, также как и сопротивления  $R_3$  и  $R_{61}$ . Между собой они соединены последовательно, а весь этот участок цепи соединен параллельно с сопротивлением  $R_{26}$ .

Тогда сопротивление  $R_0$

$$R_0 = \frac{\left( \frac{R_5 \cdot R_{12}}{R_5 + R_{12}} + \frac{R_3 \cdot R_{61}}{R_3 + R_{61}} \right) \cdot R_{26}}{\frac{R_5 \cdot R_{12}}{R_5 + R_{12}} + \frac{R_3 \cdot R_{61}}{R_3 + R_{61}} + R_{26}} = \frac{\left( \frac{5 \cdot 40}{5 + 40} + \frac{10 \cdot 26,67}{10 + 26,67} \right) \cdot 40}{\frac{5 \cdot 40}{5 + 40} + \frac{10 \cdot 26,67}{10 + 26,67} + 40} = 9,0 \text{ Ом.}$$

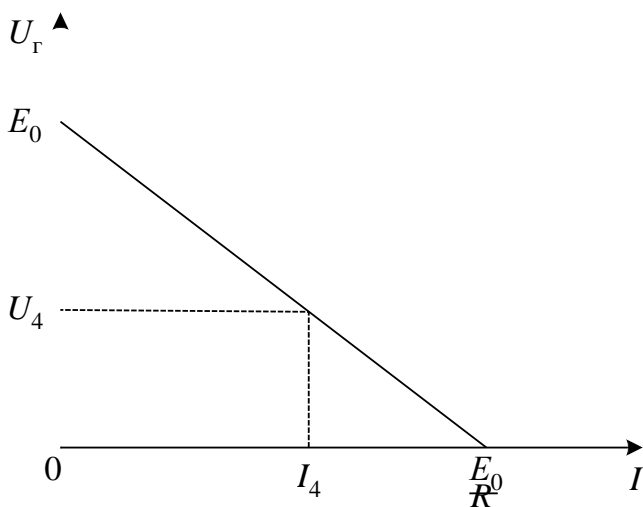
Для определения тока  $I_4$  окончательно получаем схему (рис. 4, г), из которой

$$I_4 = \frac{E_0}{R_0 + R_4} = \frac{10,625}{9,063 + 10} = 0,5 \text{ А.}$$

Полученное значение тока  $I_4$  должно совпадать со значением этого тока, рассчитанным другим методом.

Построение графической зависимости  $U_r(I)$  для 4-й ветви.

График зависимости  $U_r(I)$  представляет собой внешнюю характеристику эквивалентного генератора (рис. 5). Аналитически эта зависимость выражается формулой  $U_r = E_0 - I_4 R_0$ .



Так как зависимость имеет линейный характер, то ее можно построить по двум точкам. Первая соответствует режиму холостого хода  $I_4 = 0$ ,  $U_r = E_0$ ; вторая – режиму короткого замыкания  $U_r = 0$ ,  $I_4 = \frac{E_0}{R_0}$ .

Рабочая точка соответствует току  $I_4$  и напряжению  $U_4$ .

Рис. 5

## Задание №2

### Цепь синусоидального тока

Исходные данные для расчета схемы рис. 2.1.  
 $u(t) = 179.6 \cdot n \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ)$   
 $V, f = 50 \text{ Гц},$   
 $R_1 = 20 \cdot n \text{ Ом},$   
 $L_1 = 0.08 \cdot n \text{ Гн},$   
 $C_1 = 50 \cdot n \text{ мкФ},$   
 $C_2 = 100 \cdot n \text{ мкФ},$   
 $L_3 = 0.05 \cdot n \text{ Гн},$   
 где  $n$  - номер варианта

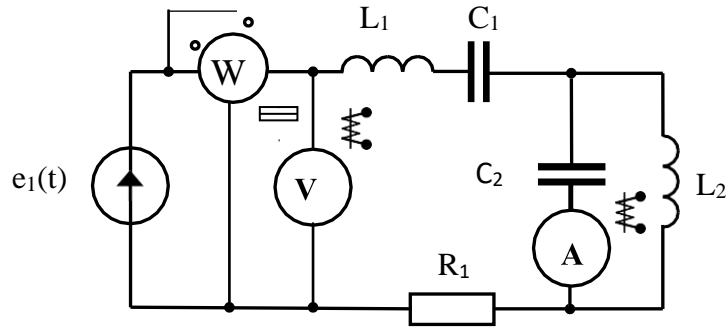


Рис . 2.1

#### Задание:

1. Составить системы уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений и в символической форме.
2. Рассчитать комплексные значения токов в ветвях символическим методом.
3. Построить векторную диаграмму токов.
4. Составить баланс мощности
5. Записать выражения для мгновенных значений токов.
6. Определить показания приборов электромагнитной – ЭМС или электродинамической системы – ЭДС.

#### Решение

2.1. На рис 2.1 представлена исходная схема замещения цепи для мгновенных значений. На рис 2.2 - схема замещения той же цепи для расчёта токов и напряжений символическим методом с использованием комплексных чисел.

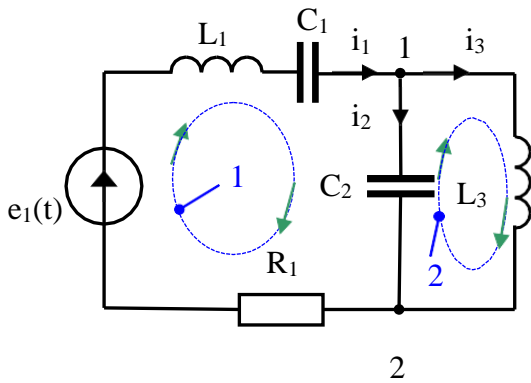


Рис . 2.1

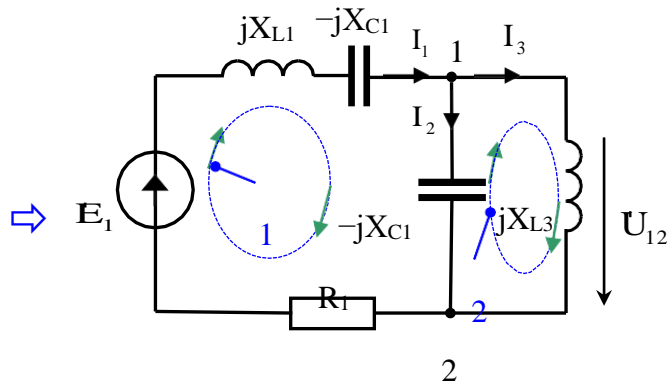


Рис . 2.2

Составить полные системы уравнений по законам Кирхгофа:

- для мгновенных значений, схема рис.2.1.
  - для узла 1  $i_1 - i_2 - i_3 = 0;$
  - для контура 1  $L_1 \frac{di_1}{dt} + \int_{C_1} i_1 dt + \int_{C_2} i_2 dt + i_1(t) R_1 = e_1(t);$
  - для контура 2  $L_3 \frac{di_3}{dt} - \int_{C_2} i_2 dt = 0$

- в символической форме, схема рис.2.2..

-для узла 1  $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$

-для контура 1  $\dot{I}_1(jX_{L1}) + \dot{I}_1(-jX_{C1}) + \dot{I}_2(-jX_{C2}) + \dot{I}_1(R_1) = \dot{E}_1;$

-для контура 2  $\dot{I}_3(jX_{L3}) - \dot{I}_2(-jX_{C2}) = 0.$

## 2.2. Определяем параметры схемы замещения цепи в комплексной форме:

- Комплекс действующего значения ЭДС:

$$\dot{E}_1 = \frac{179.6}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = 127 e^{j30^\circ} = 127 \angle 30^\circ = 110 + j63.5 \text{ В.}$$

- Угловая частота -  $\omega = 2\pi f = 314$  рад/с.
- Реактивные сопротивления:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 314 \times 0.08 = 25.1 \text{ Ом.} \quad X_{C1} = 1/\omega C_1 = 1/(314 \times 50 \times 10^{-6}) = 63.7 \text{ Ом.}$$

$$X_{L3} = \omega L_3 = 314 \times 0.05 = 15.7 \text{ Ом.} \quad X_{C2} = 1/\omega C_2 = 1/(314 \times 100 \times 10^{-6}) = 31.8 \text{ Ом.}$$

## 2.3 Рассчитываем токи по закону Ома в комплексном виде.

- Комплексное сопротивление параллельно соединённых сопротивлений индуктивности и ёмкости между узлами 1 и 2:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{jX_{C2} \times jX_{L3}}{jX_{C2} + jX_{L3}} = \frac{-j31.8 \times j15.7}{-j31.8 + j15.7} = \frac{499.3}{-j16.1} = j31 \text{ Ом.}$$

- Эквивалентное сопротивление цепи относительно зажимов источника:

$$\underline{Z}_\Sigma = jX_{L1} - jX_{C1} + R_1 + \underline{Z}_{12} = j25.1 - j63.7 + 20 = 20 - j7.52 \text{ Ом.}$$

- Комплекс действующего значения тока в первой ветви:

$$I_1 = \frac{E_1}{\underline{Z}_\Sigma} = \frac{110 + j63.5}{20 - j7.52} = 3.773 + j4.593 = 5.94 \angle 50.6^\circ \text{ А.}$$

- Комплекс действующего значения напряжения между узлами 1 и 2 цепи:

$$U_{12} = I_1 \underline{Z}_{12} = (3.773 + j4.593) (j31) = -142.44 + j117 = 184.3 \angle 140.6^\circ \text{ В.}$$

- Комплекс действующего значения тока во второй ветви:

$$I_2 = \frac{U_{12}}{-jX_{C2}} = \frac{-142.44 + j117}{-j31.8} = -3.676 - j4.475 = 5.791 \angle -129.4^\circ \text{ А.}$$

- Комплекс действующего значения тока в третьей ветви:

$$I_3 = \frac{U_{12}}{jX_{L3}} = \frac{-142.44 + j117}{j15.7} = 7.448 - j9.07 = 11.74 \angle 50.6^\circ \text{ А.}$$

Запишем мгновенные значения токов (в синусоидальной форме):

$$i_1(t) = 5.94\sqrt{2} \sin(314t + 50.6^\circ) \text{ А;}$$

$$i_2(t) = 5.791\sqrt{2} \sin(314t - 129.4^\circ) \text{ А;}$$

$$i_3(t) = 11.74\sqrt{2} \sin(314t - 50.6^\circ) \text{ А.}$$

### 2.3 Векторная диаграмма токов.

- Задаём масштаб токов  $m_i = 2 \text{ A/cm}$ .
- В масштабе  $m_i$  от начала координат откладываем токи:  $I_1 = 5.94 \angle 50.6^\circ \text{ A}$ ;  $I_2 =$

$5.791 \angle -129.4^\circ \text{ A}$  и  $I_3 = 11.74 \angle 50.6^\circ \text{ A}$ .

- На диаграмме (рис. 2.3) должен выполняться первый закон Кирхгофа в векторной форме:  $I_1 = I_2 + I_3$

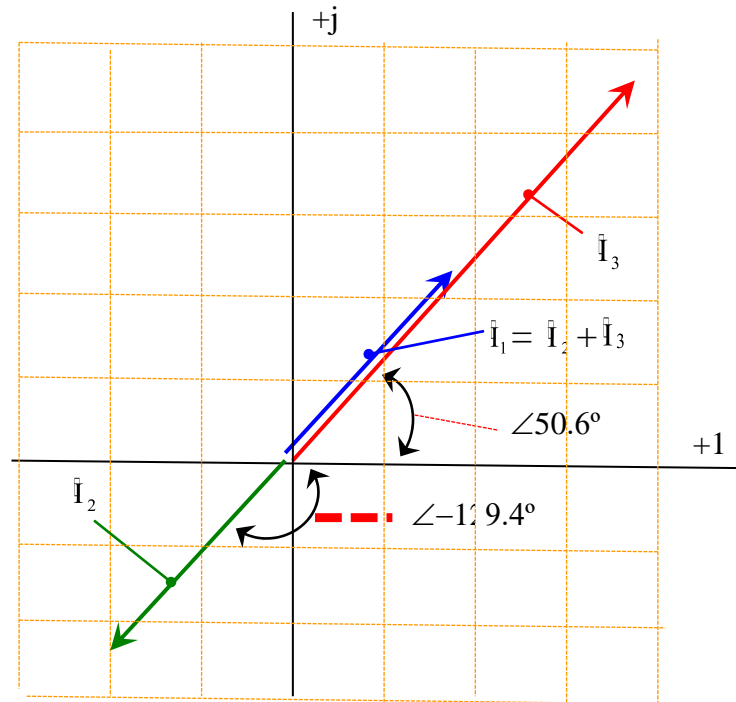


Рис. 2.3

### 4. Баланс мощности (рис. 5б),

$$\sum \tilde{S}_{\text{источников}} = \sum \tilde{S}_{\text{потребителей}}:$$

$$E_1 I_1^* = I_1^2 (jX_{L1} - jX_{C1} + R_1) + jX_{L3} I_3^2 - jX_{C2} I_2^2 =$$

$I_1^*$  – сопряжённый комплекс тока к току  $I_1$

если  $I_1 = 5.94 \angle 50.6^\circ \text{ A}$ , то  $I_1^* = 5.94 \angle -50.6^\circ \text{ A}$ .

$$\sum \tilde{S}_{\text{источников}} = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} = E_1 I_1^* = 127 \angle 30^\circ \cdot 5.94 \angle -50.6^\circ = 706.6 - j265.6.$$

$$\sum \tilde{S}_{\text{потребителей}} = P_{\text{потр}} + jQ_{\text{потр}} = I_1^2 (jX_{L1} - jX_{C1} + R_1) + I_2^2 (-jX_{C2}) + I_3^2 (jX_{L3}) =$$

$$(5.94)^2 (j25.1 - j63.7 + 20) + (5.791)^2 (-j31.8) + (11.74)^2 j15.7 = 706.6 - j265.6.$$

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}} = 706.6 \text{ Вт} \quad \text{и} \quad Q_{\text{ист}} = Q_{\text{потр}} = -265.6 \text{ ВАр.}$$

Полная мощность  $S = E_1 I_1 = 1275.94 = 754.4 \text{ ВА}$ .

### 5. Показание приборов (рис. 5б),

- амперметр показывает действующее значение тока:  $I_A = I_2 = 5.79 \text{ A}$ .
- вольтметр показывает действующее значение напряжения:  $U_V = E_1 = 127 \text{ В}$ .
- ваттметр показывает среднее за период значение подаваемой в цепь мгновенной мощности (активную мощность):

$$P_w = E_1 I_1 \cos(\varphi_e - \varphi_{I2}) = \operatorname{Re}\{\underline{E}_1 \underline{I}_2\} = 2.64 \text{ Вт.}$$

# Задание №3

## Переходные процессы

### Расчет переходных процессов в линейных цепях постоянного тока

При расчете переходных процессов в линейных цепях в основном используют три метода:

- Классический с нахождением постоянных интегрирования.
- Численный метод решения, выполняемый на компьютере.
- Операторный метод.

### Выполнение в среде MathCAD

Последовательность операций проиллюстрируем на конкретном примере. В электрической цепи постоянного тока замыкается ключ, требуется найти переходные функции  $u_c(t)$ ,  $i_l(t)$ ,  $i_c(t)$ ,  $u_l(t)$

Схема цепи приведена на рис 4.1, ее исходные данные:

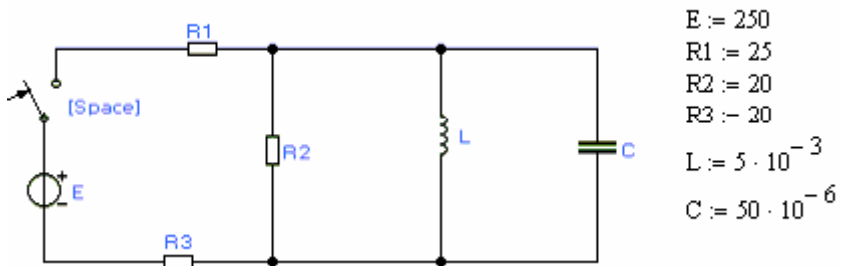


Рис 4.1

#### Способ 1 Классический метод.

1. **Составление характеристического уравнения.** Составляем выражение входного сопротивления  $Z(p)$  записанное относительно источника после коммутации, приняв катушку за элемент  $p \cdot L \cdot C$

сопротивления  $pL$ , а  
конденсатор  $1/pC$ .

$$Z(p) := R1 + R3 + \frac{p \cdot L \cdot C}{p \cdot L + R2 + p^2 \cdot R2 \cdot C \cdot L}$$

$$Z(p) := p^2 \cdot C \cdot L \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_3) + p \cdot L \cdot (R_1 + R_3 + C) + R_2 \cdot (R_1 + R_3)$$

$$Z(p) \rightarrow \frac{9}{40000} \cdot p^2 + \frac{900001}{4000000} \cdot p + 900$$

$$-\left(\frac{900001}{4000000}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{900001}{4000000}\right)^2 - 4 \cdot 900 \cdot \frac{9}{40000}}$$

$$p_1 := \frac{\left(\frac{900001}{4000000}\right) - \sqrt{\left(\frac{900001}{4000000}\right)^2 - 4 \cdot 900 \cdot \frac{9}{40000}}}{2 \cdot \frac{9}{40000}} \quad p_1 = -500.001 + 1.936i \times 10^3$$

$$p_2 := \frac{\left(\frac{900001}{4000000}\right) + \sqrt{\left(\frac{900001}{4000000}\right)^2 - 4 \cdot 900 \cdot \frac{9}{40000}}}{2 \cdot \frac{9}{40000}} \quad p_2 = -500.001 - 1.936i \times 10^3$$

## 2. определение времени переходного процесса T

$$\delta := 500.001 \quad \omega := 1.936i \cdot 10^3 \quad T := \frac{5}{\delta} \quad T = 10 \times 10^{-3}$$

## 3. по виду корней можно определить характер свободной составляющей тока и напряжения, а именно:

- если корни  $p_1$  и  $p_2$  комплексно сопряженные, то свободная составляющая запишется:  $A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta)$
- в случае отрицательных корней  $p_1$  и  $p_2$  свободная составляющая запишется:  $A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$
- если корни  $p_1$  и  $p_2$  отрицательные и равны (для схем с двумя реактивными элементами), то свободная составляющая будет представлена:  $(A_1 + A_2 \cdot t)e^{p \cdot t}$ .

## 4. Определение начальных условий.

Ток в катушке и напряжение на конденсаторе до коммутации, согласно основным законам коммутации скачком измениться не могут, т.е.  $i_L(0^-) = i_L(0^+)$  и  $u_C(0^-) = u_C(0^+)$ . В нашем случае источник до коммутации был отключен, поэтому ток в катушке и напряжение на конденсаторе до коммутации были равны нулю.

$$I := 0$$

$$U_C := 0$$

5. **Расчет  $u_l(0+)$  и  $i_c(0+)$**  произведем на основе законов Кирхгофа в схеме после коммутации

$$U_l := 0 \quad I := 0 \quad I_c := 0 \quad I_r := 0$$

Given

$$I = I_l + I_c + I_r$$

$$E = I \cdot (R_1 + R_3) + I_r \cdot R_2$$

$$E = I \cdot (R_1 + R_3) + U_c$$

$$E = I \cdot (R_1 + R_3) + U_l$$

$$\text{Find}(I, I_r, I_c, U_l) = \begin{pmatrix} 5.556 \\ 0 \\ 5.556 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. **Расчет принужденных значений токов и напряжения** выполняют, исходя из того, что на постоянном токе емкость – обрыв, а катушка обладает нулевым сопротивлением.

$$I_{np} := \frac{E}{R_1 + R_3} \quad I_{np} = 5.556 \quad U_{cnp} := 0$$

7. **Определение постоянных интегрирования** производят с учетом корней характеристического уравнения:

$$I_c := I_{cnp} + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \gamma)$$

$$U_c := U_{cnp} + B \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \nu)$$

с снр ;

в программе MathCAD решение этой системы будет выглядеть следующим образом:

$$A := 0 \quad \gamma := 0$$

Given

$$5.556 + A \cdot \sin(\gamma) = 0$$

$$L \cdot A \cdot (-\delta \cdot \sin(\gamma) + \omega \cdot \cos(\gamma)) = 0$$

$$\text{Find}(A, \gamma) = \begin{pmatrix} -5.752 \\ 1.309 \end{pmatrix}$$

Аналогичным образом найдем постоянные интегрирования для напряжения uc:

$$B := 0 \quad v := 0$$

Given

$$B \cdot \sin(v) = 0$$

$$C \cdot B \cdot (-\delta \cdot \sin(v) + \omega \cdot \cos(v)) = 5.556$$

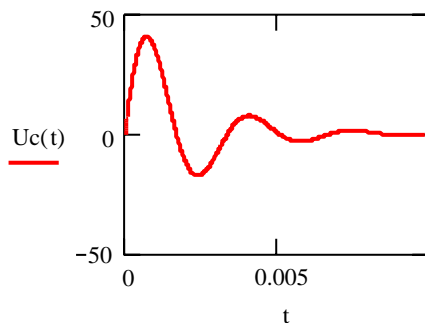
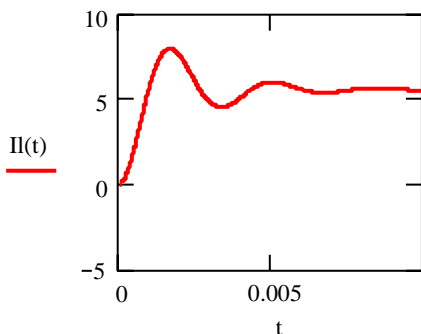
$$\text{Find}(B, v) = \begin{pmatrix} 59.582 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 8. Представление искомых переходных функций.

Отыскав постоянные интегрирования, и определив вид свободной составляющей, запишем результат и построим графики, зависимостей  $i_l(t)$  и  $u_c(t)$ .

$$i_l(t) := 5.556 - 5.752e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + 1.309)$$

$$u_c(t) := 59.582 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



### Недостатки классического метода:

- большой объем и громоздкость вычислений, в результате чего есть большая вероятность ошибиться, где-либо.

## Способ 2 Численный метод решения системы дифференциальных уравнений

Система MathCAD позволяет непосредственно решать системы дифференциальных уравнений численным методом, с помощью встроенной функции **rkfixed**.

**rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)** – общий вид функции, возвращающей матрицу, в который первый столбец содержит значение аргумента функции, а оставшийся столбец содержит соответствующие значения искомой функции.

- Y должен быть матрицей nx1 первоначальных значений искомых функций, в нашем случае это значения тока на катушке и напряжения на емкости до коммутации.
- X1, X2 - границы интервала, на котором будет решаться система дифференциальных уравнений, в нашем случае это время переходного процесса (от t=0 до t=T=0.01).
- Npoints - число точек на интервале интегрирования, в которых искомые функции будут аппроксимированы.
- D - это n-элементная вектор-функция (матрица), содержащая первые производные неизвестных функций.

Наиболее важным шагом в решении дифференциального уравнения в программе MathCAD является корректное представление вектора D, в правой части которого кроме напряжения источника могут быть записаны только ток индуктивности и напряжение на емкости.

Составим и решим систему уравнений в дифференциальной форме:

$$i = i_r + i_l + C \cdot \frac{d}{dt} u_c ;$$

$$E = i \cdot (R_1 + R_3) + i_r \cdot R_2 ;$$

$$E = i \cdot (R_1 + R_3) + L \cdot \frac{d}{dt} i_l ;$$

$$E = i \cdot (R_1 + R_3) + u_c .$$

Выразим из полученной системы уравнений производные тока на катушке и напряжения на конденсаторе:

$$\frac{d}{dt} u_c = \frac{E - u_c}{(R_1 + R_3) \cdot C} - \frac{u_c}{R_2 \cdot C} - \frac{i_c}{C} ;$$

$$\frac{d}{dt} i_l = \frac{u_c}{L} .$$

Примем :

$$a = R_1 + R_3 ; \quad y_1 = u_c ;$$

$$b = R_2 ; \quad y_2 = i_l \cdot L =$$

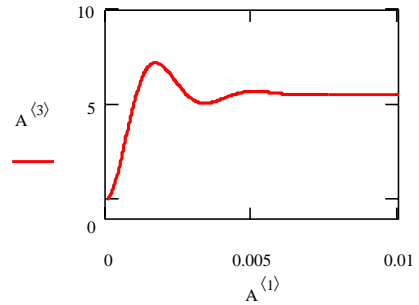
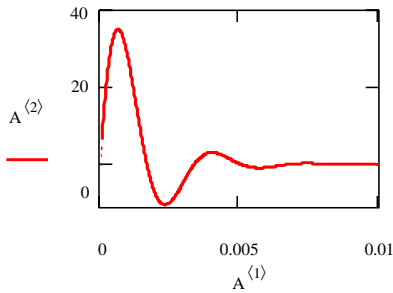
Тогда в канонической форме матрицы Y и D запишутся следующим образом:

$$\begin{array}{lll}
 E := 250 & -3 & R1 := 25 \quad a := 45 \\
 L := 5 & & R2 := 20 \quad b := 20
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 C := 50 \cdot 10^{-6} \quad R3 := 20 \\
 Y := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 f(t, y) := \begin{pmatrix} E - \frac{a}{b} \cdot y_1 - y_2 \cdot a - y_1 \\ C \cdot a \\ \frac{y_1}{L} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$A := \text{rkfixed}(Y, 0, 0.01, 500, f)$$

	1	2	3
1	0	0	0
2	$2 \cdot 10^{-5}$	2.19	$4.401 \cdot 10^{-3}$
3	$4 \cdot 10^{-5}$	4.314	0.017
4	$6 \cdot 10^{-5}$	6.371	0.039
5	$8 \cdot 10^{-5}$	8.359	0.068
6	$1 \cdot 10^{-4}$	10.277	0.106
7	$1.2 \cdot 10^{-4}$	12.125	0.15
8	$1.4 \cdot 10^{-4}$	13.9	0.203
9	$1.6 \cdot 10^{-4}$	15.604	0.262
10	$1.8 \cdot 10^{-4}$	17.234	0.327
11	$2 \cdot 10^{-4}$	18.79	0.399
12	$2.2 \cdot 10^{-4}$	20.273	0.477
13	$2.4 \cdot 10^{-4}$	21.682	0.561
14	$2.6 \cdot 10^{-4}$	23.016	0.651
15	$2.8 \cdot 10^{-4}$	24.276	0.745
16	$3 \cdot 10^{-4}$	25.461	0.845



Нетрудно визуально убедиться, что результаты полностью совпадают с полученными ранее, это подтверждает правильность расчетов.

#### Недостатки метода:

- Не определяет законы изменения тока и напряжения в аналитическом виде т.е. в виде переходной функции  $i(t)$  и  $u(t)$ .
- Требуется определенный навык при составлении вектор-функции  $D$ , вида

$$\frac{d}{dt} u_c = f(u_c, i_l, u)$$

$$\frac{d}{dt} i_l = f(u_l, i_c, u)$$

### Способ 3: Операторный метод расчета переходных процессов на постоянном токе

Сущность операторного метода состоит в следующем. По формуле прямого преобразования Лапласа

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} \cdot I(t) dt$$

находятся изображения токов  $I(p)$  и действующих напряжений.

Затем с помощью обратного преобразования Лапласа

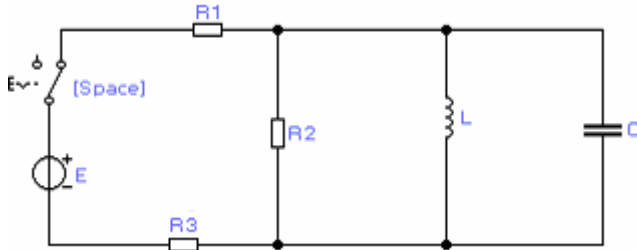
$$i(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \left( \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{p \cdot t} \cdot I(p) dp \right)$$

осуществляется переход от изображения  $I(p)$  к оригиналу переходной функции  $i(t)$ .

Последовательность решения РГР4 операторным методом в программе MathCAD состоит в следующем.

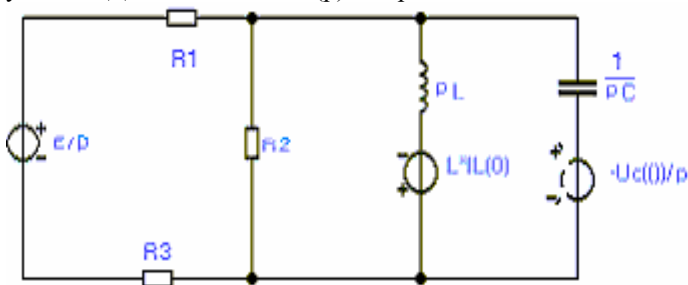


- По исходной схеме составить операторную схему замещения.



исходная схема

**Составление эквивалентной операторной схемы.** При переходе от исходной схемы к эквивалентной операторной схеме необходимо ввести в ветви с конденсатором и катушкой дополнительные ЭДС вида  $-U_c(0)/p$  и  $L\Pi(0)$ , учитывающие ненулевые начальные условия. Положительные направления этих ЭДС следует принять совпадающими с положительным направлением тока в данной ветви. Индуктивность  $L$  учитывается на схеме замещения операторным сопротивлением  $pL$ , а емкость -  $1/pC$ , действующая ЭДС  $E$  источника  $E(p) = E/p$ .



эквивалентная операторная схема замещения

- Определить начальные значения (до коммутации) тока через катушку  $L$  и напряжения на конденсаторе  $C$ .
  - Найти значения дополнительных ЭДС. Т.к. в рассмотренном примере начальные условия равны нулю, то и значения дополнительных ЭДС равны нулю.
  - Рассчитать полученную схему для установившегося режима любым известным методом. Рассмотренную схему решим методом двух узлов.

$$U(p) := \frac{\frac{E}{p}}{R1+R3} \qquad U(p) \rightarrow \frac{50}{\dots}$$

$$\frac{1}{R1 + R3} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{p \cdot L} + p \cdot C \qquad 9 \cdot p \cdot \left( \frac{13}{180} + \frac{200}{p} + \frac{1}{20000} \cdot p \right)$$

$$\frac{E}{p} - U(p)$$

$$I(p) := \frac{p}{R1 + R3} \qquad I(p) \rightarrow \frac{50}{9 \cdot p} - \frac{10}{81 \cdot p \cdot \left( \frac{13}{180} + \frac{200}{p} + \frac{1}{20000} \cdot p \right)}$$

$$Ir(p) := \frac{U(p)}{R2} \qquad Ir(p) \rightarrow \frac{5}{18 \cdot p \cdot \left( \frac{13}{180} + \frac{200}{p} + \frac{1}{20000} \cdot p \right)}$$

$$\Pi(p) := \frac{U(p)}{p \cdot L} \qquad \Pi(p) \rightarrow \frac{10000}{9 \cdot p^2 \cdot \left( \frac{13}{180} + \frac{200}{p} + \frac{1}{20000} \cdot p \right)}$$

$$Ic(p) := \frac{U(p)}{\frac{1}{p \cdot C}} \qquad Ic(p) \rightarrow \frac{1}{3600 \cdot \left( \frac{13}{180} + \frac{200}{p} + \frac{1}{20000} \cdot p \right)}$$

- Найти оригиналы полученных изображений токов с помощью встроенной функции Invlaplace

$$I(t) := I(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow \frac{50}{9} - \frac{400}{1449} \cdot \exp\left(\frac{-6500}{9} \cdot t\right) \cdot \frac{23 \cdot \sin\left(\frac{3500}{9} \cdot \sqrt{23} \cdot t\right)}{\sqrt{9}}$$

$$Ir(t) := Ir(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow \frac{100}{161} \cdot \exp\left(\frac{-6500}{9} \cdot t\right) \cdot \frac{23 \cdot \sin\left(\frac{3500}{9} \cdot \sqrt{23} \cdot t\right)}{\sqrt{9}}$$

$$U(t) := U(p) \operatorname{invlaplace}, p \rightarrow \frac{50}{9} - \frac{50}{9} \cdot \exp\left(\frac{-6500}{9} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{3500}{9} \cdot \sqrt{23} \cdot t\right) - \frac{650}{1449} \cdot \exp\left(\frac{-6500}{9} \cdot t\right) \cdot \sqrt{23} \cdot \sin\left(\frac{3500}{9} \cdot \sqrt{23} \cdot t\right)$$

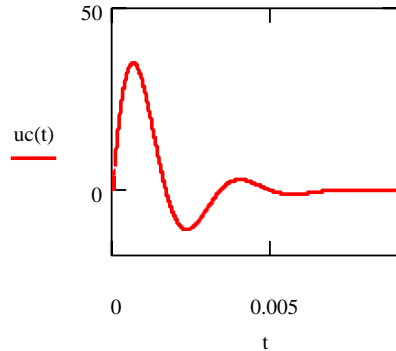
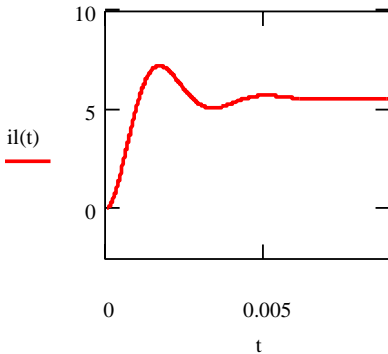
$$I_1(t) := I_1(p) \operatorname{invlaplace}, p \rightarrow \frac{50}{9} \cdot \exp\left(\frac{-6500}{9} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{3500}{9} \cdot \sqrt{23} \cdot t\right) - \frac{650}{1449} \cdot \exp\left(\frac{-6500}{9} \cdot t\right) \cdot \sqrt{23} \cdot \sin\left(\frac{3500}{9} \cdot \sqrt{23} \cdot t\right)$$

Т.к. сопротивление R2 и конденсатор включены параллельно, то их напряжения будут изменяться по одному и тому же закону:

$$u_c(t) := R_2 \cdot I_r(t)$$

$$u_c(t) \rightarrow \frac{2000}{161} \cdot \exp\left(\frac{-6500}{9} \cdot t\right) \cdot \sqrt{23} \cdot \sin\left(\frac{3500}{9} \cdot \sqrt{23} \cdot t\right)$$

- Построить графики зависимостей  $i_l(t)$  и  $u_c(t)$  от времени.



По виду графиков убеждаемся, что ток  $i_l(t)$  и напряжение  $u_c(t)$  совпадают с найденными ранее. С применением MathCADa вычислительные операции, как видно достаточно прозрачны и несложны.

## Исследование переходных процессов в линейных электрических цепях при синусоидальном источнике напряжения

### Способ 1 Классический метод расчета переходных процессов при синусоидальном источнике напряжения

Принципиально классический метод при синусоидальном источнике напряжения ничем не отличается от рассмотренного ранее, поэтому подробно остановимся лишь на некоторых особенностях метода.

Последовательность расчета предусматривает следующие этапы:

1. Найти корни характеристического уравнения  $p_1$  и  $p_2$  и время переходного процесса.

- По виду корней определить вид свободной составляющей (пункты 1 и 2 можно не делать т.к. искомые значения не изменились и их можно просто переписать).
- Найти начальную фазу и частоту источника, а затем записать ЭДС источника  $e(t) := 250\sin(\omega \cdot t + \psi)$

$$f := \frac{|p1| + |p2|}{2} \qquad f = 2 \times 10^3$$

$$\psi := \pi \cdot \frac{\sqrt{L \cdot C}}{2\pi \cdot f} \cdot f \qquad \psi = 3.142$$

$$\omega := 2 \cdot 3.14 \cdot f \qquad \omega = 1.256 \times 10^4$$

- Найти *мгновенные значения* тока на катушке  $i_l$  и напряжения на конденсаторе  $u_c$  до коммутации, а с учетом законов коммутации можно утверждать, что это будут значения полного тока на катушке и напряжения на конденсаторе в момент времени  $t(0+)$ .  
Т.к в нашем случае источник до коммутации был отключен, то ток на катушке  $i_l$  и напряжение на конденсаторе  $u_c$  до коммутации были равны нулю:

$$i_l := 0 \qquad u_c := 0$$

- Используя законы Кирхгофа найти *мгновенные значения* напряжения на катушке  $u_l$  и тока на конденсаторе  $i_c$  в момент времени  $t(0+)$ .
- Найти принужденные токи и напряжение на конденсаторе и их мгновенные значения.

Примечание: *мгновенные значения тока и напряжения в MathCADe обозначены заглавными буквами.*

$$U := \frac{E}{R1+R3} \left( \frac{1}{R1+R3} + \frac{1}{R2} + \frac{i}{\omega \cdot L} + \frac{\omega \cdot C}{i} \right)$$

$$U = -0.747 - 6.33i$$

$$I := \frac{E - U}{R1 + R3} \quad I = -3.912 + 0.141i$$

$$I_r := \frac{U}{R2} \quad I_r = -0.037 - 0.316i$$

$$I_l := \frac{U}{\omega \cdot L \cdot i} \quad I_l = -0.101 + 0.012i$$

$$I_c := \frac{U}{\omega \cdot C} \quad I_c = -3.975 + 0.469i$$

$$U_c(t) := |U| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U))$$

$$I_l(t) := |I_l| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_l))$$

$$I_{rnp}(t) := |I_r| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_r))$$

$$I_{lnp}(t) := |I_l| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_l))$$

$$I_{cnp}(t) := |I_c| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(I_c))$$

7. Определить выражения напряжения на конденсаторе и тока на катушке:

$$i_l(t) = I_{lnp}(t) + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \gamma) ;$$

$$u_c(t) = U_{cnp}(t) + B \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \nu)$$

8. Определить постоянные интегрирования любым из рассмотренных ранее методов:

$$i_l(0) = i_{lnp}(0) + i_{лсв}(0) ; \quad u_c(0) = u_{cnp}(0) + u_{ссв}(0) ;$$

$$u_l(0) = L \cdot \frac{d}{dt} i_l(t) ; \quad i_c(0) = C \cdot \frac{d}{dt} u_c(t)$$

или для рассмотренного случая после подстановки  $t=0$

найдем коэффициенты  $A, B, \gamma, \nu$ , решив систему уравнений:

$$i \ln p(0) + A \cdot \sin(\gamma) = 0 ;$$

$$u_{cp}(0) + B \cdot \sin(\nu) = 0 ;$$

$$L \cdot A \cdot (-\delta \cdot \sin(\gamma) + \omega \cdot \cos(\gamma)) = 0 ;$$

$$C \cdot B \cdot (-\delta \cdot \sin(\nu) + \omega \cdot \cos(\nu)) = ic(0).$$

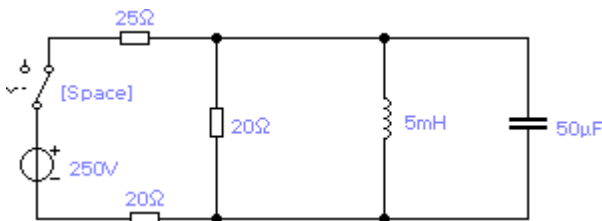
9. После нахождения постоянных интегрирования, записать ответ, построить графики.

### Способ 2 Операторный метод расчета переходных процессов при синусоидальном источнике напряжения

Как уже ранее говорилось, при использовании программы MathCAD операторный метод является самым простым и легким, а поэтому и предпочтительным.

Последовательность и метод расчета переходных процессов при синусоидальном источнике напряжения принципиально ничем не отличаются от решения с источником постоянного напряжения. Следует лишь обратить внимание на то, что при прямом преобразовании Лапласа MathCAD находит изображение функции  $F(s)$  вместо обычно применяемой  $F(p)$ , но это не имеет принципиального значения.

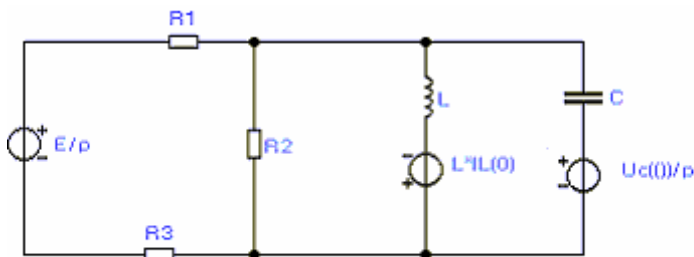
Рассмотрим операторный метод расчета переходных процессов при синусоидальном источнике напряжения на примере схемы.  
ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ



$$\begin{aligned} E &:= 250 \text{ В} \\ L &:= 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \\ C &:= 50 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \\ R1 &:= 25 \text{ Ом} \\ R2 &:= 20 \text{ Ом} \\ R3 &:= 20 \text{ Ом} \end{aligned}$$

#### исходная схема

Т.к. в рассмотренном примере начальные условия равны нулю, то и значения дополнительных ЭДС равны нулю.



### операторная схема замещения

Найдем изображение источника ЭДС

$$e(t) := 250 \sin(\omega \cdot t + \psi)$$

$$E(s) := e(t) \text{ laplace, } t \rightarrow 250 \cdot \frac{(.383 s + 1450.493)}{(s^2 + 2464909.8596)}$$

Для удобства заменим аргумент  $s$  на  $p$

$$E(p) := 250 \cdot \frac{(0.383 p + 1450.493)}{(p^2 + 2464909.850)}$$

Затем также как и ранее найдем изображения всех токов, и напряжения на конденсаторе во времени. В программе это будет выглядеть так:

$$U(p) := \frac{E(p)}{R1+R3}$$

$$\frac{1}{R1 + R3} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{p \cdot L} + p \cdot C$$

$$I(p) := \frac{E(p) - U(p)}{R1 + R3}$$

$$I_r(p) := \frac{U(p)}{R2}$$

$$I_L(p) := \frac{U(p)}{p \cdot L}$$

$$I_c(p) := \frac{U(p)}{p \cdot C}$$

Оригиналы токов находятся при помощи функции **invlaplas**.

**Примечание:** Из-за малого формата здесь приведены лишь первые члены оригиналов тока

$$u_c(t) := U(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 53.177 \cdot \cos(1570.000 \cdot t) + 35.071$$

$$i(t) := I(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 9.443 \cdot \cos(1570.0031 \cdot t) + 4.353$$

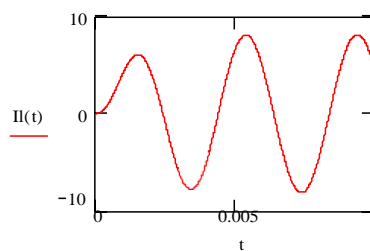
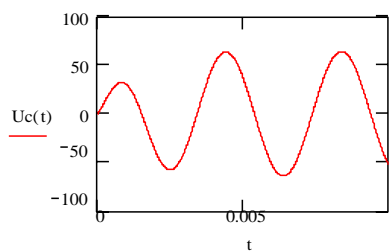
$$i_r(t) := I_r(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 2.659 \cdot \cos(1570.003 \cdot t) + 1.75$$

$$i_l(t) := I_l(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 4.467 \cdot \exp(-722.222 \cdot t) \cdot \cos(1865.046)$$

$$i_c(t) := I_c(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 2.753 \cdot \cos(1570.003 \cdot t) - 4.174$$

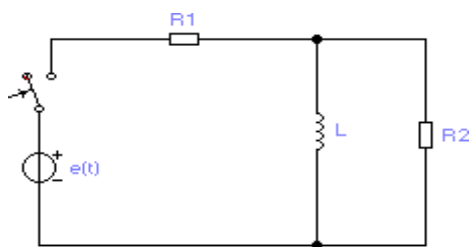
Из-за малого формата здесь приведены лишь первые члены оригиналов тока.

После проведения всех преобразований и расчетов, получив законы изменения тока  $i_l$  и напряжения  $u_c$ , построим их графики.

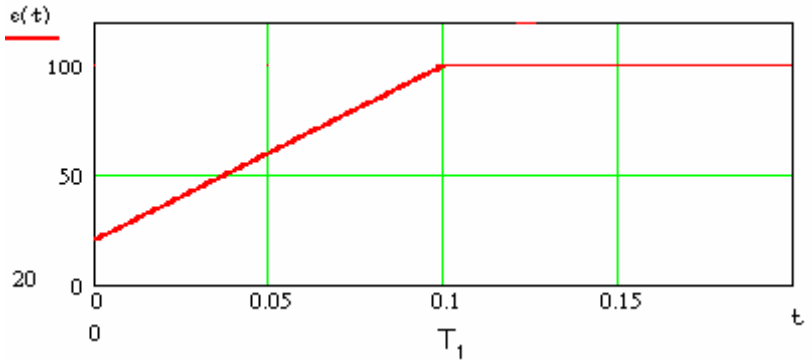


## Интеграл Дюамеля

Рассчитать переходную функцию тока  $i(t)$ , для схемы, показанной на рисунке при действии ЭДС  $e(t)$ , изменяющейся по заданному закону.



$$R_2 := 20 \text{ Ом}; \quad R_1 := 20 \text{ Ом}; \quad L := 1 \text{ Гн.}$$



$$e(t) := 800 \cdot t + 20 \quad 0 < t < T_1$$

$$e(t) := 100 \quad T_1 < t \quad , \text{ где}$$

$$T_1 := 0.1$$

При использовании интеграла Дюамеля, переменную по которой ведем интегрирование обозначим  $\tau$ , а под  $t$  по-прежнему будем понимать тот момент времени, в который требуется найти ток в цепи.

$$i(t) := e(0) \cdot g(t) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} e(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau ;$$

Последовательность расчета с помощью интеграла Дюамеля.

1. Определение переходной проводимости  $g(t)$  для исследуемой цепи.
2. Нахождение  $g(t - \tau)$ . С этой целью в формуле  $g(t)$ ,  $t$  заменяют на  $(t - \tau)$ .
3. Определение производной от напряжения  $e'(\tau)$ .
4. Подстановка найденных значений в формулу, интегрирование по переменной  $\tau$ , и подстановка пределов.

Чтобы найти переходную проводимость, необходимо найти ток цепи при подключении источника постоянного напряжения  $E = 1\text{В}$ . Этот ток и будет искомой переходной проводимостью  $g(t)$ . Найдем переходный ток операторным методом, используя метод двух узлов:

$$U(p) := \frac{E}{p \cdot R1} \quad I(p) := \frac{E - U(p)}{p} \cdot \frac{1}{R1}$$

$$\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{p \cdot L}$$

$$i(t) := I(p) \text{ invlaplace } , p \rightarrow \frac{1}{20} - \frac{1}{40} \cdot \exp(-10 \cdot t) ;$$

Определим функцию переходной проводимости  $g(t)$

$$g(t) := i(t)$$

$$g(t - \tau) \rightarrow \frac{1}{20} - \frac{1}{40} \cdot \exp(-10 \cdot t + 10 \cdot \tau) ;$$

Заменяем  $e(t)$  на  $e(\tau)$  и найдем ее производную.

$$e(\tau) := 20 + 800 \cdot \tau \quad e1(\tau) := \frac{d}{d\tau} e(\tau)$$

$$e2(\tau) := 100 \quad e21(\tau) := \frac{d}{d\tau} e2(\tau)$$

После того, как определены все значения подынтегральной функции, произведем интегрирование:

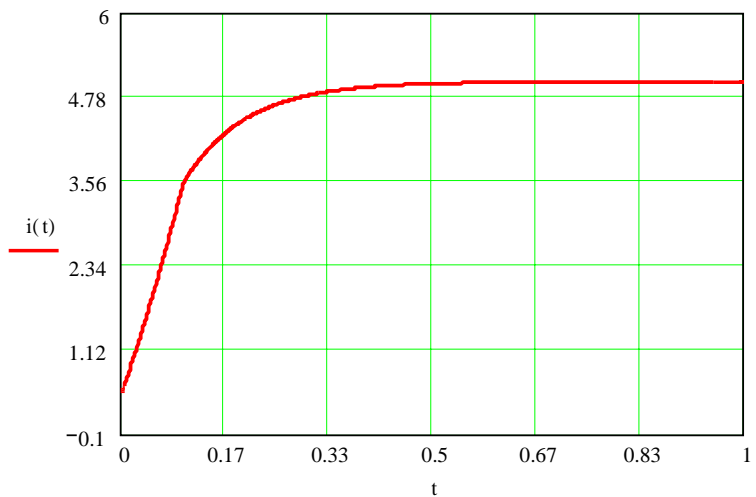
$$i1(t) := e(0) \cdot g(t) + \int_0^t e1(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$i1(t) \rightarrow -1 + \frac{3}{2} \cdot \exp(-10 \cdot t) + 40 \cdot t$$

$$i2(t) := e(0) \cdot g(t) + \int_0^{T1} e1(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau + \int_{T1}^t e21(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$i2(t) \rightarrow 5.0 + \frac{3}{2} \cdot \exp(-10 \cdot t) - 2. \cdot \exp(-10. \cdot t + 1.0)$$

$$i(t) := \begin{cases} i1(t) & \text{if } t \geq 0 \wedge t < 0.1 \\ i2(t) & \text{otherwise} \end{cases}$$

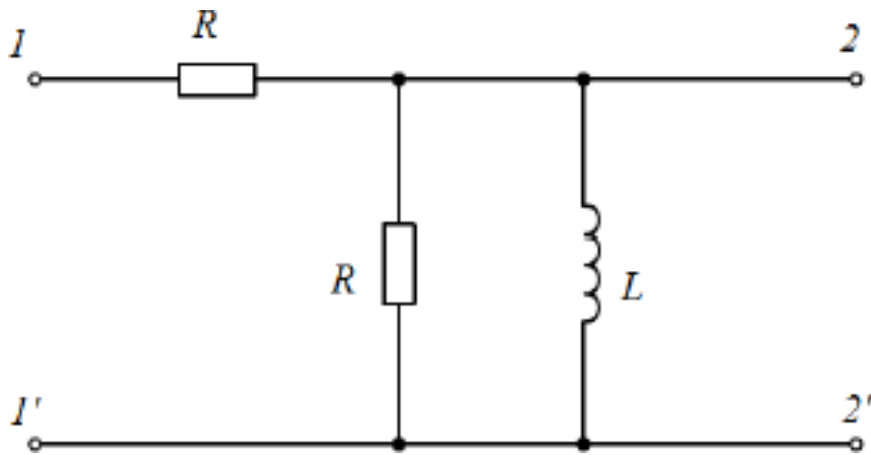


## Задание №4 Четырехполюсники

Задан четырехполюсник  
Требуется:

1. записать в общем виде уравнения четырехполюсника в  $\underline{Z}$ -,  $\underline{Y}$ -,  $\underline{H}$ -,  $\underline{A}$ -параметрах (не используя числовые данные);
2. рассчитать свою систему параметров методом холостого хода и короткого замыкания комплексным методом.
3. система параметров и рабочая частота заданы в таблице

№ варианта	f (МГц)	Система параметров
2	0,8	H



$\underline{Z}$ -параметры связывают токи и напряжения следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\underline{Z}$ -параметры в матричной форме:  $\begin{pmatrix} U \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$

$\underline{Y}$ -параметры связывают токи и напряжения следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 \\ \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\underline{Y}$ -параметры в матричной форме:  $\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & Y \\ Y & Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ U \end{pmatrix}$

$\underline{H}$ -параметры связывают токи и напряжения следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} U_1 &= H_{11} I_1 + H_{12} U_2 \\ \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\underline{H}$ -параметры в матричной форме:  $\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & H \\ H & H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ U \end{pmatrix}$

A-параметры связывают токи и напряжения следующими соотношениями:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 - \underline{A}_{12}\underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 - \underline{A}_{22}\underline{I}_2$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

A-параметры в матричной форме:  $\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем систему H-параметров четырехполюсника для частоты  $f = 0,8 \text{ МГц}$ .

Режим короткого замыкания ( $\underline{U}_2 = 0$ ) со стороны зажимов 22':

$$\underline{H}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_1 \underline{Z}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1$$

$$\underline{Z}_1 = R$$

Тогда  $\underline{H}_{11} = R = 2200 \text{ кОм}$

$$\underline{H}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_2} = -1$$

Режим холостого хода ( $\underline{I}_1 = 0$ ) со стороны зажимов 11':

$$\underline{H}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2 \underline{Z}_2}{\underline{I}_2 \underline{Z}_2} = 1$$

$$\underline{H}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_2 \underline{Z}_2} = \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$1 \quad R + j\omega L \quad R + j2\pi fL \quad 2200 + j2 \cdot 3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^6 \cdot 2200 \cdot 10^{-6} \quad 2200 + j11052,8$$

$$\underline{H}_{22} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R \cdot j\omega L}{R \cdot j\omega L} = \frac{R}{R \cdot j2\pi fL} = \frac{2200}{j2 \cdot 3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^6 \cdot 2200 \cdot 10^{-6} \cdot 2200} = \frac{2200}{j24316160} =$$

Тогда  $\underline{H}_{22} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}$

$$= \frac{11269,6e^{j78,74^\circ}}{24316160e^{j90^\circ}} = 4,6e^{-j11,26} = 4,6\cos 11,26 - j4,6\sin 11,26 = 4,5 - j0,9 \text{ Ом}$$

## Задание №5 Трёхфазная цепь

Рассчитать цепь рис.1, соединенную звездой с нулевым проводом, имеющую следующие параметры:  $E_A = 220 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ ,

$$L_0 = (50 \cdot n) \text{ мГн},$$

$$R_0 = (20 \cdot n) \text{ Ом},$$

$$R_1 = (25 \cdot n) \text{ Ом},$$

$$L_1 = (150 \cdot n) \text{ мГн},$$

$$C_2 = (80 \cdot n) \text{ мкФ},$$

$$R_3 = (70 \cdot n) \text{ Ом},$$

где n-номер варианта,

### Расчет токов в ветвях цепи

Комплексы действующих значений фазных ЭДС

$$\dot{E}_A = 220 \text{ В}, \quad \dot{E}_B = 220e^{j240^\circ} = -110 - j190,52 \text{ В}, \quad \dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} = 110 + j190,52 \text{ В}.$$

Комплексные сопротивления фаз нагрузки

$$\underline{Z}_A = \frac{R_1 + j\omega L_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{25 + j314 \cdot 150 \cdot 10^{-3}}{25 + j314 \cdot 150 \cdot 10^{-3}} = 22,01e^{j27,96^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_B = -j \frac{1}{\omega C_2} = -j \frac{1}{314 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 39,8e^{-j90^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_C = R_3 = 70 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 =$$

$$= 20 + j314 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 20 + j15,7 = 25,43e^{j38,13^\circ} \text{ Ом}; \quad \omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ рад/с}.$$

Напряжение между нейтральными точками 0 и 0'

$$\dot{U}_{00'} = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_0} = \frac{220(0,045e^{-j27,96^\circ} + e^{j240^\circ} \cdot 0,025e^{j90^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 0,0143)}{0,087e^{-j13,24^\circ}} = 146,67e^{-j9,15^\circ} \text{ В},$$

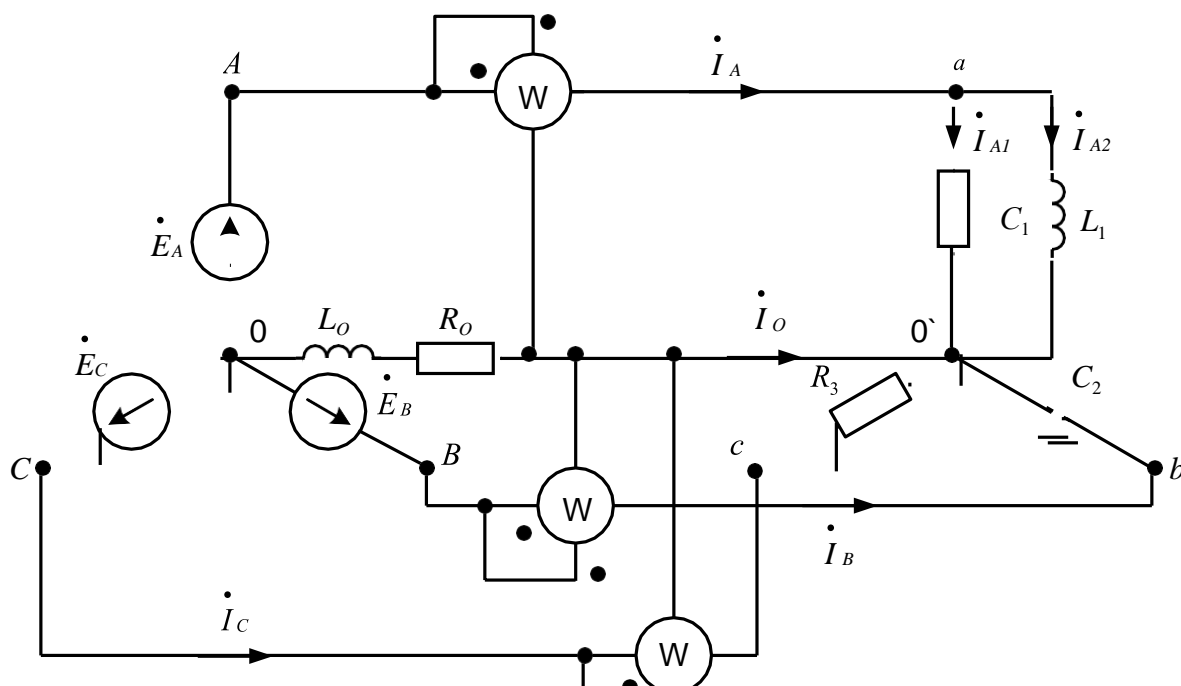


Рис. 1

где проводимости ветвей

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{22,01e^{j27,96^\circ}} = 0,045e^{-j27,96^\circ} = 0,04 - j0,021 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{39,8e^{-j90^\circ}} = 0,025e^{j90^\circ} = j0,025 \text{ См}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{70} = 0,0143 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_0 = \frac{1}{\underline{Z}_0} = \frac{1}{25,43e^{j38,13^\circ}} = 0,039e^{-j38,13^\circ} = 0,031 - j0,024 \text{ См}.$$

Токи в линейных проводах и нулевом проводе

$$\dot{I}_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_{0'0}) \underline{Y}_A = (220 - 146,67e^{-j9,15^\circ}) \cdot 0,045e^{-j27,96^\circ} = 3,54e^{-j10,73^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_{0'0}) \underline{Y}_B = (220e^{j240^\circ} - 146,67e^{-j9,15^\circ}) \cdot 0,025e^{j90^\circ} = 7,62e^{-j56,73^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_{0'0}) \underline{Y}_C = (220e^{j120^\circ} - 146,67e^{-j9,15^\circ}) \cdot 0,0143 = 4,75e^{j140^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{A1} = \frac{\dot{I}_A \underline{Z}_A}{R_1} = \frac{3,54e^{-j10,73^\circ} \cdot 22,01e^{j27,96^\circ}}{25} = 3,11e^{j17,23^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{A2} = \frac{\dot{I}_A \underline{Z}_A}{j\omega L_1} = \frac{3,54e^{-j10,73^\circ} \cdot 22,01e^{j27,96^\circ}}{314 \cdot 150 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j90^\circ}} = 1,65e^{-j72,77^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_0 = -\dot{U}_{0'0} \underline{Y}_0 = -146,67e^{-j9,15^\circ} \cdot 0,039e^{-j38,13^\circ} = 5,72e^{-j72,77^\circ} \text{ А}.$$

Напряжения на фазах нагрузки, соединенной звездой *abc*

$$\dot{U}_a = \dot{E}_A - \dot{U}_{0'0} = 220 - 146,67e^{-j9,15^\circ} = 78,73e^{j17,23^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_b = \dot{E}_B - \dot{U}_{0'0} = 220e^{j240^\circ} - 146,67e^{-j9,15^\circ} = 304,76e^{j213,76^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_c = \dot{E}_C - \dot{U}_{0'0} = 220e^{j120^\circ} - 146,67e^{-j9,15^\circ} = 332e^{j140^\circ} \text{ В}.$$

## Баланс мощностей

Комплексная мощность генератора

$$\underline{S} = P + jQ = \dot{E}_A \dot{I}_A + \dot{E}_B \dot{I}_B + \dot{E}_C \dot{I}_C = 220 \cdot 3,54e^{j10,73^\circ} + 220e^{j240^\circ} \cdot 7,62e^{j56,73^\circ} +$$

$$+ 220e^{j120^\circ} \cdot 4,75e^{-j140^\circ} = 3029,66e^{-j34,35^\circ} = 2501,18 - j1709,66 \text{ ВА},$$

где  $\underline{S}_\Gamma = 3029,66 \text{ ВА}$ ,  $P_\Gamma = 2501,18 \text{ Вт}$ ,  $Q_\Gamma = -1709,66 \text{ вар}$  – полная, активная и

реактивная мощности генератора.

Комплексная мощность нагрузки

$$\underline{S}_H = P_H + jQ_H = I_A^2 \underline{Z}_A + I_B^2 \underline{Z}_B + I_C^2 \underline{Z}_C + I_O^2 \underline{Z}_O = 3,54^2 \cdot 22,01 e^{j27,96^\circ} + 7,62^2 \cdot 39,8 e^{-j90^\circ} + 4,75^2 \cdot 70 + 5,72^2 \cdot 25,43 e^{j38,13^\circ} = 2477,48 - j1667,9 = 2986,6 e^{-j33,95^\circ} \text{ ВА,}$$

где  $S_H = 2986,6$  ВА,  $P_H = 2477,48$  Вт,  $Q_H = -1667,9$  вар – полная, активная, и

реактивная мощности нагрузки.

Таким образом

$$S_\Gamma \approx S_H; P_\Gamma \approx P_H; Q_\Gamma \approx Q_H,$$

что подтверждает правильность выполненного расчета.

## Активная мощность нагрузки, соединенной звездой *abc*

Активная мощность нагрузки  $P_n$ , соединенной звездой *abc*, равна сумме показаний ваттметров  $P_A, P_B, P_C$

$$P = \text{Re}(78,73e^{j17,23^\circ} \cdot 3,54e^{j10,73^\circ}) = \text{Re}(278,70e^{j27,96^\circ}) = 246,17 \text{ Вт};$$

$$P_A = \frac{\text{Re}(U_a I_A)}{*} = \text{Re}(304,76e^{j213,76^\circ} \cdot 7,62e^{j56,73^\circ}) = \text{Re}(2322,27e^{j270,49^\circ}) \approx 0 \text{ Вт};$$

$$P_B = \frac{\text{Re}(U_b I_B)}{*} = \text{Re}(332e^{j140^\circ} \cdot 4,75e^{-j140^\circ}) = 1577 \text{ Вт};$$

$$P_C = \text{Re}(U_c I_C) = \text{Re}(332e^{j140^\circ} \cdot 4,75e^{-j140^\circ}) = 1577 \text{ Вт};$$

$$P_n = P_A + P_B + P_C = 246,17 + 0 + 1577 = 1823,77 \text{ Вт}.$$

## Потенциальная диаграмма напряжений, совмещенная с векторной диаграммой токов

Выбираем масштабы напряжений и токов  $m_U = 50 \text{ В/см}$ ,  $m_I = 2 \text{ А/см}$ .

Примем потенциал точки 0 равным нулю. По методике, изложенной выше и в [1,4], строим потенциальную диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов (рис. 2). Она выражает уравнения, составленные для цепи на основании законов Кирхгофа в комплексной форме. Линейные токи и ток в нулевом проводе связаны первым законом Кирхгофа

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = -\dot{I}_O.$$

Линейные напряжения

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = 220 - 220e^{j240^\circ} = 380e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = 220e^{j240^\circ} - 220e^{j120^\circ} = 380e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = 220e^{j120^\circ} - 220 = 380e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

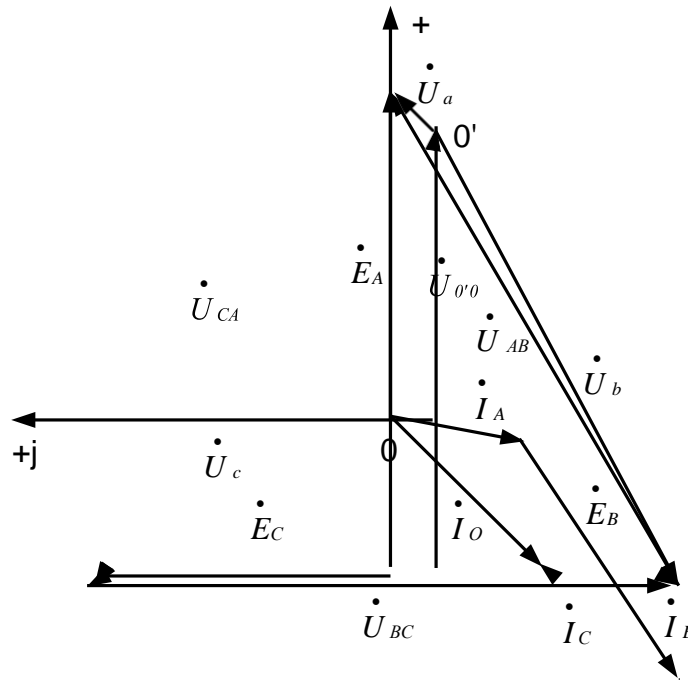


Рис. 2

**Задача 2.** Рассчитать трехфазную цепь рис. 3, в которой нагрузка соединена треугольником. Схема имеет следующие параметры:  $E_A = 127$  В,  $f = 50$  Гц,  $R_1 = 20$  Ом,  $C_1 = 50$  мкФ,  $R_2 = 30$  Ом,  $L_2 = 50$  мГн,  $L_3 = 70$  мГн.

### Расчет токов в ветвях цепи

Комплексы действующих значений фазных ЭДС

$$127 \text{ В}, \quad \dot{E}_B = 127e^{j240^\circ} = -63,5 - j110 \text{ В}, \quad \dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} = -63,5 + j110 \text{ В}.$$

Линейные напряжения

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = 127 - 127e^{j240^\circ} = 220e^{j30^\circ} \text{ В}; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = 127e^{j240^\circ} - 127e^{j120^\circ} = 220e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = 127e^{j120^\circ} - 127 = 220e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

$$\dot{E}_A =$$

Комплексные сопротивления фаз нагрузки

$$\underline{Z}_{AB} = R_1 - j \frac{1}{\omega C} = 20 - j \frac{1}{314 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 20 - j63,69 = 66,76e^{-j72,57^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{BC} = R_2 + j\omega L_2 = 30 + j314 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 30 + j15,7 = 33,86e^{j27,62^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{CA} = R_3 + j\omega L_3 = 40 + j314 \cdot 70 \cdot 10^{-3} = 40 + j21,98 = 45,64e^{j28,79^\circ} \text{ Ом}.$$

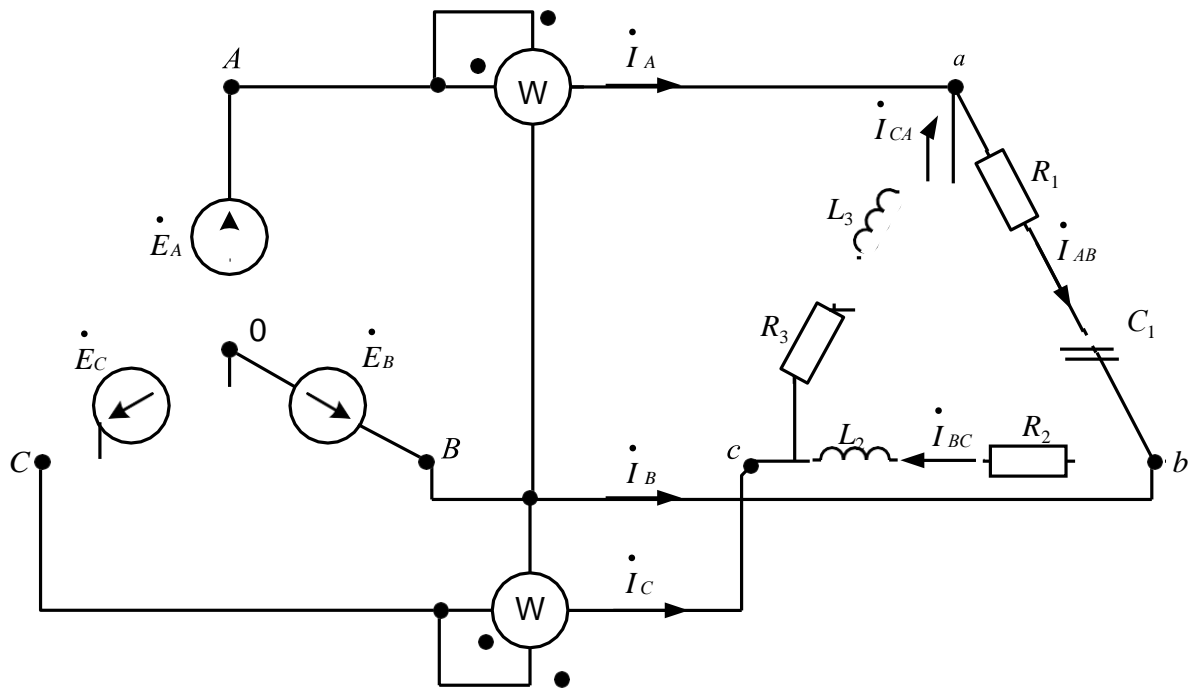


Рис. 3

Фазные токи нагрузки

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{220e^{j30^\circ}}{66,76e^{-j72,57^\circ}} = 3,3e^{j102,57^\circ} = -0,67 + j3,22 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{220e^{-j90^\circ}}{33,86e^{j27,62^\circ}} = 6,5e^{-j117,62^\circ} = -3,01 - j5,76 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{220e^{j150^\circ}}{45,64e^{j28,79^\circ}} = 4,82e^{j121,21^\circ} = -2,5 + j4,12 \text{ A}.$$

Линейные токи определяются по первому закону Кирхгофа в комплексной форме

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 1,83 - j0,9 = 2,04e^{-j26,19^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = -2,34 - j8,98 = 9,27e^{-j104,61^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 0,51 + j9,88 = 9,89e^{j87,04^\circ} \text{ A}.$$

## Баланс мощностей

Комплексная мощность генератора

$$\underline{S}_Г = P + jQ = \dot{E}_A \dot{I}_A + \dot{E}_B \dot{I}_B + \dot{E}_C \dot{I}_C = 127 \cdot 2,04 e^{j26,19^\circ} + 127 e^{j240^\circ} \cdot 9,27 e^{j104,61^\circ} + 127 e^{j120^\circ} \cdot 9,89 e^{-j87,04^\circ} = 2421,42 + j485,25 = 2469,56 e^{j11,33^\circ} \text{ ВА,}$$

где  $\underline{S}_Г = 2469,55 \text{ ВА}$ ,  $P_Г = 2421,42 \text{ Вт}$ ,  $Q_Г = 485,25 \text{ вар}$  – полная, активная,

реактивная мощности генератора.

Комплексная мощность нагрузки

$$\underline{S}_н = P_н + jQ_н = I_{AB}^2 \underline{Z}_{AB} + I_{BC}^2 \underline{Z}_{BC} + I_{CA}^2 \underline{Z}_{CA} = 3,3^2 \cdot 66,76 e^{-j72,57^\circ} + 6,5^2 \cdot 33,86 e^{j27,62^\circ} + 4,82^2 \cdot 45,64 e^{j28,79^\circ} = 2414,59 + j480,25 = 2461,89 e^{j11,24^\circ} \text{ ВА,}$$

где  $S_н = 2461,89 \text{ ВА}$ ,  $P_н = 2414,59 \text{ Вт}$ ,  $Q_н = 480,25 \text{ вар}$  – полная, активная, и

реактивная мощности нагрузки.

Таким образом

$$S_Г \approx S_н; P_Г \approx P_н; Q_Г \approx Q_н,$$

что подтверждает правильность выполненного расчета.

### Активная мощность нагрузки, соединенной треугольником *abc*

Активная мощность нагрузки  $P_н$ , соединенной треугольником *abc*, равна алгебраической сумме показаний ваттметров  $P_A, P_C$

$$P_A = \text{Re}(220 e^{j30^\circ} \cdot 2,04 e^{j26,19^\circ}) = 249,73 \text{ Вт};$$

$$P_C = \text{Re}(U_{CB} I_C) = \text{Re}(220 e^{j90^\circ} \cdot 9,89 e^{-j87,04^\circ}) = 2172,9 \text{ Вт};$$

$$P_н = P_A + P_C = 249,73 + 2172,9 = 2422,63 \text{ Вт.}$$

### Потенциальная диаграмма напряжений, совмещенная с векторной диаграммой токов

Выбираем масштабы напряжений и токов  $m_U = 25 \text{ В/см}$ ,  $m_I = 2 \text{ А/см}$ .

Примем потенциал точки О равным нулю. Строим потенциальную диаграмму напряжений, совмещенную с векторной диаграммой токов (рис. 4). Она выражает законы Кирхгофа в комплексной форме

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & U_{AB} = E_A - E_B; \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ U_{BC} &= E_B - E_C; \quad U_{CA} = E_C - E_A . \end{aligned}$$

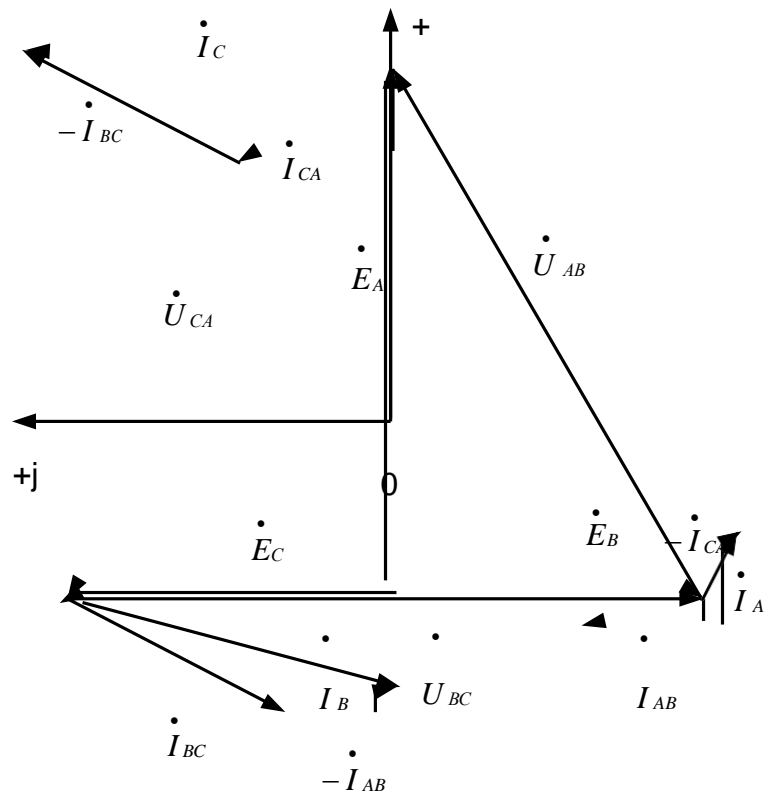


Рис. 4